

SÉRIE A, N° 3143
N° D'ORDRE
4015

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Jean-Louis RIGAL

- 1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION AU PROBLÈME DE L'ESTIMATION DE LA MAGNITUDE
ABSOLUE DES ÉTOILES NAINES.
- 2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 19 avril 1958 devant la Commission d'Examen.

MM. DANJON

Président.

DARMOIS

SCHATZMAN

LICHNEROWITZ

} *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1959

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Jean-Louis RIGAL

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION AU PROBLÈME DE L'ESTIMATION DE LA MAGNITUDE
ABSOLUE DES ÉTOILES NAINES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 19 avril 1958 devant la Commission d'Examen.

MM. DANJON

Président.

DARMOIS

SCHATZMAN

LICHNEROWITZ

} *Examineurs.*



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1959

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

Doyen J. PÉRÈS.

PROFESSEURS

G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	DE CUONAC.....	Biologie végétale, (P. C. B.).
FOCH.....	T	Mécanique physique et expérimentale.	M ^{lle} CAUCHOIS....	T Chimie physique.
PAUTHENIER.....	T	Electrotechnique générale.	THELLIER.....	T Physique du Globe.
De BROGLIE.....	T	Théories physiques.	L'HÉRITIER.....	T Génétique.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.	GRIVET.....	T Radioélectricité.
GARNIER.....	T	Géométrie supérieure.	PONCIN.....	T Mécanique des fluides.
PÉRÈS.....	T	Mécanique des fluides et application.	DUBREIL.....	T Arithmétique et théorie des nombres.
LAUGIER.....	T	Physiologie générale.	QUELET.....	T Chimie organique.
M. CURIE.....	T	Physique (S. P. C. N.).	CAGNIARD.....	T Géophysique appliquée.
BARRABÉ.....	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	CHAMPETIER.....	T Chimie macromoléculaire.
G. DARMOIS.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	CUVILLIER.....	T Géologie structurale et Géologie appliquée.
BOURCART.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	JUNG.....	T Pétrographie.
PLANTEFOL.....	T	Botanique.	TRILLAT.....	T Microscopie et diffraction électronique.
GRASSÉ.....	T	Evolution des êtres organisés.	WIEMANN.....	T Chimie organique structurale.
PRÉVOST.....	T	Chimie organique.	JACQUINOT.....	T Spectroscopie et Physique céleste.
BOULIGAND.....	T	Application de l'Analyse à la Géométrie.	VASSY.....	T Physique de l'atmosphère.
CHAUDRON.....	T	Chimie appliquée.	DESTOUCHES.....	T Théories physiques.
WYART.....	T	Minéralogie.	M. PRUVOST.....	T Géologie.
TEISSIER.....	T	Zoologie.	AMIEL.....	T Chimie générale
MANGENOT.....	T	Biologie végétale.	HOCART.....	T Minéralogie.
P. AUGER.....	T	Physique quantique et Relativité.	J.-P. MATHIEU....	T Physique (P. C. B.).
MONNIER.....	T	Physiologie des fonctions.	COUTEAUX.....	T Biologie animale (P. C. B.).
PIVETEAU.....	T	Paléontologie.	MAY.....	T Biologie animale (P. C. B.).
ROCARD.....	T	Physique (E. N. S.).	CHOQUET.....	T Calcul différentiel et intégral.
H. CARTAN.....	T	Mathématiques (E. N. S.).	FELDMANN.....	T Biologie (P. C. B.).
LAFFITTE.....	T	Chimie générale.	GUINIER.....	T Physique générale
FAYARD.....	T	Mécanique générale.	JOST.....	T Physiologie comparée.
COULOMB.....	T	Physique du Globe.	FORTET.....	T Calcul des probabilités.
M ^{lle} COUSIN.....	T	Biologie animale (S. P. C. N.).	SCHWARTZ.....	T Méthodes mathématiques de la Physique.
CHRÉTIEN.....	T	Chimie minérale.	CHOUARD.....	T Physiologie végétale.
P. DRACH.....	T	Zoologie.	MALAVARD.....	T Aviation.
KASTLER.....	T	Physique.	BRELOT.....	T Calcul différentiel.
EPHRUSSI.....	T	Génétique.	NORMANT.....	T Chimie organique
WURMSER.....	T	Biologie physicochimique.	BÉNARD.....	T Chimie (P. C. B.).
RIVIÈRE.....	T	Géologie (S. P. C. N.).	BUVAT.....	T Botanique (E. N. S.).
GAUTHERET.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).	DUGUÉ.....	T Statistique mathématique.
LUCAS.....	T	Recherches physiques.	GELOSO.....	T Chimie (S. P. C. N.).
A. THOMAS.....	T	Biologie cellulaire.	SOULAIRAC.....	T Psychophysiologie.
ARNULF.....	T	Optique appliquée.	ULRICH.....	T Physiologie végétale.
MAX MORAND.....	T	Enseignement de Physique.	MARÉCHAL.....	T Optique théorique et appliquée.
SOLEILLET.....	T	Physique.	KIRRMANN.....	T Théories chimiques.
FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	CHADEFAUD.....	T Botanique.
DANJON.....	T	Astronomie.	DESTRIAU.....	T Physique (M. P. C.).
LAPORTE.....	T	Physique générale et Radioactivité.	M ^{lle} LE BRETON....	T Physiologie générale.
JANET.....	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	SALEM.....	T Mathématiques générales.
PETIT.....	T	Biologie maritime.	LELONG.....	T Mathématiques générales.
QUENEY.....	T	Météorologie et Dynamique atmosphérique.	DEVILERS.....	T Anatomie et Histologie comparées.
GALLIEN.....	T	Embryologie.	EHRESMANN.....	T Topologie algébrique.
EICHHORN.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).	FRANÇON.....	T Physique (S. P. C. N.).
			GLANCEAUD.....	T Géographie physique et Géologie dynamique.
			GODEMENT.....	T Mathématiques (M. P. C.).
			PISOT.....	T Calcul des probabilités.
			ROCH. (E.).....	T Géologie.
			SCHATZMAN.....	T Astrophysique.

TERMIER.....	T	Paléontologie stratigraphique.	COTTE.....	T	Physique (M. P. C.).
ZAMANSKY.....	T	Mathématiques générales.	J. DUBOIS.....	T	Chimie (S. P. C. N.).
JOLIOT.....	T	Physique nucléaire et Radio-activité.	LAMOTTE.....		Zoologie (E. N. S.).
LENNUIER.....		Physique (P. C. B.).	MICHEL.....	T	Chimie (S. P. C. N.).
RIZET.....		Génétique.	OLMER.....	T	Énergétique générale.
ROUTHIER.....		Géologie appliquée.	ROUAULT.....	T	Physique (Enseignement).
M ^{me} TONNELAT..		Théories physiques.	GAUTHIER.....	T	Mécanique appliquée.
DIXMIER.....		Mathématiques (M. P. C.).	BARCHIEWITZ.....		Chimie Physique.
SOUCHAY.....		Chimie générale	BROSSEL.....		Physique atomique.
AIGRAIN.....		Physique (P. C. B.).	BUSER.....		Biologie animale (P. C. B.).
BRUSSET.....		Chimie minérale	CAMUS.....		Biologie végétale (P. C. B.).
M. LÉVY.....		Physique théorique.	CASTAING.....		Physique générale.
LENORMANT.....		Physiologie.	CURIEN.....		Minéralogie et Cristallographie.
M ^{me} CHAIX.....		Chimie biologique.	MOYSE.....		Physiologie végétale.
M ^{me} HUREL-PY..		Biologie végétale (P. C. B.).	NOIROT.....		Évolution des êtres organisés.
PIAUX.....		Chimie (P. C. B.).	PANNETIER.....		Chimie (P. C. B.).
BRUN.....		Mécanique expérimentale des fluides.	POSSOMPES.....		Biologie animale (P. C. B.).
LEDERER.....	T	Chimie biologique.	PULLMANN.....		Chimie théorique
M ^{me} DUERREIL...T		Mathématiques.	TEILLAC.....		Physique nucléaire et Radio-activité.
M ^{me} LELONG.....T		Mathématiques (E. N. S.).	TONNELAT.....		Biologie physico-chimique.
BELLAIR.....	T	Géologie (S. P. C. N.).	VILLE.....		Économétrie.
			WILLEMART.....		Chimie (P. C. B.).

Secrétaire général..... CH. MONIER.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

A MA MÈRE,
A MA FEMME,
ET A TOUS MES PROFESSEURS,

QUI M'ONT FORMÉ, ENCOURAGÉ ET EDUQUÉ
EN ME DONNANT LE MEILLEUR DE LEUR AMOUR ET DE LEUR EXPÉRIENCE

PREMIÈRE THÈSE.

CONTRIBUTION AU PROBLÈME DE L'ESTIMATION DE LA MAGNITUDE ABSOLUE DES ÉTOILES NAINES

SOMMAIRE. — Un estimateur de magnitude absolue a été appliqué aux vitesses radiales et mouvements propres de naines proches, selon le principe du « maximum de vraisemblance ». Après discussion et contrôle des hypothèses admises, nous sommes conduit à relever *significativement* la pente de la séquence principale, et, notamment, à attribuer aux naines A_5 - F_5 une magnitude de moins que Keenan et Morgan. Nous imputons les résultats antérieurs à nos travaux à une sous-estimation du rôle *considérable* joué par la sélection observationnelle dès la 7^e magnitude.

Un catalogue de vitesses réduites existe sur fiches perforées.

ABSTRACT. — A maximum likelihood statistics has been applied to radial velocities and proper motions of nearly dwarf stars, in order to estimate their absolute magnitudes. Basic hypothesis having been discussed and tested, we get for the main sequence a slope *significantly* greater than was hitherto admitted, A_5 - F_5 dwarfs, in particular, been one magnitude brighter than was supposed by Morgan and Keenan. Former results can be imputed to the observational selection, which proves considerable, already for the 7th magnitude stars.

A catalogue of reduced speeds has been punched and is available.

ZUSAMMENFASSUNG. — Das Prinzip vom « Maximum der Wahrscheinlichkeit » wurde auf die Radialgeschwindigkeiten und Eigenbewegungen der nahen Zwerge angewandt, um ihre absoluten Helligkeiten zu erhalten. Eine Untersuchung und Nachprüfung der angenommenen Hypothesen führten zu einer *bedeutenden* Erhöhung der Neigung der Hauptsequenz und, besonders, zu einer Verringerung um eine Grösse der Helligkeiten von Keenan und Morgan der Zwerge A_5 - F_5 . Die vor unserer Arbeit gefundenen Resultate erklären wir durch eine Unterschätzung der erheblichen Rolle welche, von der 7. Grösse ab, die Beobachtungsselektion spielt.

Ein Katalog der reduzierten Geschwindigkeiten wurde auf Lochkarten übertragen.

Резюме. — Чтобы получить абсолютные величины близких карликов был применен принцип “максимума вероятности” к их лучевым скоростям и собственным движениям. После исследования и контроля принятых гипотез, автор нашел значительное изменение наклона главной последовательности, что приводит к уменьшению на одну величину значений принятых Кинан и Морган для карликов A₅-F₅. Результаты предыдущих работ зависят, согласно автора, от преуменьшения роли, которую играет подбор наблюдательного материала начиная с 7-ой величины.

Каталог приведенных скоростей был нанесен на перфокарты.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
AVANT-PROPOS	4
1. But poursuivi	4
2. Principales notations employées	5
3. Conventions de vocabulaire et d'écriture	8

CHAPITRE I.

Les données d'observation.

4. Choix des étoiles naines	9
5. Homogénéité des échantillons	9
6. Les données d'observation : les mouvements propres	11
7. Les vitesses radiales	12
8. Magnitudes visuelles et types spectraux	12
9. Distances réduites et mouvements tangentiels réduits	12
10. Choix des données	13

CHAPITRE II.

Méthodes générales d'estimation des paramètres des lois $\psi_r(r)$ ou $\psi_k(k)$.

11. Méthode de Schwarzschild	13
12. Méthode de Charlier	14
13. Techniques des moindres carrés	14
14. Perfectionnement récent de la technique proposée par Mineur	17

CHAPITRE III.

Résultats généraux dont il doit être tenu compte.

15. Indépendance, pour un groupe homogène des u_i , x_i et de M.....	17
16. Loi de distribution des magnitudes absolues.....	18
17. Loi de distribution $\psi_x(x)$ des positions stellaires.....	18
18. Loi de distribution $\psi_u(u_i)$ des vitesses spatiales.....	19

CHAPITRE IV.

Méthode et technique proposées.

19. Exigences théoriques.....	20
20. Calcul de Log P.....	20
21. Formule asymptotique pour Log P.....	21
22. Estimateurs proposés (U_i^E , k^E , γ^E).....	22
23. Estimation des constantes $A'_{ij} = A_{ij}$ de l'ellipsoïde des vitesses.....	23
24. Signification (dans le cadre des hypothèses faites) des résultats obtenus (deux méthodes équivalentes et concordantes).....	26

CHAPITRE V.

Discussion des hypothèses faites.

25. Existence et signification d'une dispersion des magnitudes.....	28
26. Homogénéité de la population et normalité de $\psi_u(u_L)$	30
27. Stabilité des résultats par rapport aux hypothèses faites.....	30
28. Rôle de la sélection observationnelle.....	31

CHAPITRE VI.

Principaux résultats obtenus.

Comparaison avec les parallaxes trigonométriques.

29. Estimations k^E et D^E	33
30. Interprétation astrophysique.....	34
31. Variation de D^E le long de la séquence principale.....	34
32. Retour aux parallaxes trigonométriques.....	35

CONCLUSIONS.....	38
------------------	----

REMERCIEMENTS.....	38
--------------------	----

TABLEAUX :

I. $n \cdot Sp$	39
II. $M_0 (Sp)$	40
III. Choix, influence et signification des A'_{ij} et A_{ij}	40
IV. Stabilité de k^E par rapport à l'échantillon étudié.....	41
V. Introduction de la dispersion s des magnitudes.....	41
VI-VII. k^E/r_0 , Sp et D^E , r_0 , Sp	42
VIII. U_i^E/r_0 , Sp	42

APPENDICES :

I. Programmes conçus et catalogue réalisé.....	43
II. Estimations de $\vec{U}$ en employant différentes méthodes.....	45
III. Formules approchées.....	46
IV. Étoiles simples et étoiles multiples.....	47
BIBLIOGRAPHIE.....	48
Figure 1. Trièdres fondamental et associé à L, B.....	8
» 2. Estimateur $\lambda^{(M)}$	16
» 3. Rôle de la sélection observationnelle.....	32
» 4. Diagramme estimé de Russell.....	33
» 5. Diagramme évolutif semi-empirique.....	35
» 6. D^{h^2}/r_0 , Sp.....	36

AVANT-PROPOS.

1. But poursuivi. — La détermination des distances, problème fondamental en Astronomie, n'est possible directement que par la méthode des parallaxes trigonométriques.

Malheureusement, ces dernières sont si petites (de l'ordre de 10^{-7} rad) que l'obtention de résultats significatifs est une tâche longue et fastidieuse, même dans le cas des étoiles les plus proches : les programmes de parallaxes sont pratiquement abandonnés et le catalogue le plus moderne (Schlesinger, 1935) ne comprend que 4 000 résultats, dont plus de 10 % sont négatifs !

Une discussion des parallaxes trigonométriques, si riches en erreurs systématiques et accidentelles ignorées ou mal connues ⁽¹⁾ et servant à calibrer tous les autres indicateurs de distance, s'impose donc et ne peut être conduite que par recours à la comparaison des résultats obtenus directement avec ceux provenant de méthodes indirectes d'estimation utilisant, par exemple, les mouvements propres et les vitesses radiales d'étoiles d'une même population.

Il nous a semblé nécessaire d'étudier, de manière aussi critique que

⁽¹⁾ La formule

$$\text{Parallaxe} \left(= \frac{4,74 \text{ mouvement propre}}{\text{Vitesse tangentielle}} \right) \sim \frac{\text{Mouvement propre}}{10}.$$

nous montre que la composante du mouvement angulaire de l'étoile due à la parallaxe est petite, ce qui rend l'estimation du terme correspondant particulièrement délicate.

possible, cette classe d'estimateurs ⁽²⁾ et d'obtenir les estimations les meilleures, c'est-à-dire qui tiennent au mieux compte de la nature et du sens physique des données d'observation à notre disposition.

Pour ce faire, nous allons successivement choisir les données les plus homogènes actuellement accessibles et dont le sens physique est le plus grand (*nous avons délibérément préféré considérer un petit nombre de données très sûres, plutôt qu'un grand nombre de résultats peu significatifs* : nos estimations auront ainsi clairement un sens même si nos incertitudes d'échantillonnage sont grandes), puis récapituler les résultats qu'on peut considérer comme acquis et dont toute théorie statistique doit tenir compte, et enfin discuter, en fonction de nos désirs, de la nature de la méthode statistique à employer : une technique fondée sur le principe du « maximum de vraisemblance » ⁽³⁾ s'imposera.

Bien entendu, il importera de contrôler les hypothèses faites et d'éprouver la signification des résultats finalement obtenus.

2. Principales notations employées. — (L, B, r) coordonnées sphériques d'une étoile par rapport à un trièdre *fondamental*, lié à la galaxie.

En général, mais non nécessairement, nous avons supposé ce trièdre rapporté au centre et au pôle « radio » de la galaxie, soit

L = 0°, B = 0°	pour $\alpha = 17^h 39^m 48^s$, $\delta = -29^\circ 60'$	en coordonnées équatoriales 1900.
L ₀ = 327° 79,	B ₀ = -1° 39	en coordonnées galactiques d'Ohlsonn
B = 90°	pour $\alpha = 12^h 39^m 22^s$, $\delta = +25^\circ 13'$	en coordonnées équatoriales 1900,
L ₀ = 267°, B ₀ = 87° 13		en coordonnées galactiques d'Ohlsonn.

A chaque direction (L, B) nous faisons correspondre le trièdre *associé*, défini par la matrice des g_{ij}

$$\begin{array}{lll} g_{11} = -\sin L, & g_{12} = -\cos L \sin B, & g_{13} = \cos L \cos B, \\ g_{21} = \cos L, & g_{22} = -\sin L \sin B, & g_{23} = \sin L \cos B, \\ g_{31} = 0, & g_{32} = \cos B, & g_{33} = \sin B. \end{array}$$

Nous connaissons, pour chaque étoile considérée,

— la magnitude apparente (visuelle) m ;

⁽²⁾ Nous désignerons par *estimateur*, toute fonction d'un échantillon et par *estimation* la valeur numérique, aléatoire, qu'elle prend.

⁽³⁾ Nous ne voyons aucune raison de renoncer à cette traduction du mot « likelihood ».

- la magnitude absolue (M);
- les composantes μ_s et μ_B du mouvement propre et la vitesse radiale ρ .

Nous en déduisons les quantités suivantes, qui peuvent être considérées comme des données d'observation :

la distance

$$r = 10^{\frac{m - M}{5}};$$

la parallaxe

$$\pi = \frac{1}{r};$$

la distance réduite r_0 (correspondant à la magnitude absolue arbitraire M_0)

$$r_0 = 10^{\frac{m - M_0 + 5}{5}};$$

(r_0 ne dépend que de m , M_0 fixé); la quantité, sans dimension,

$$k = \frac{r}{r_0} = 10^{\frac{M_0 - M}{5}};$$

(k ne dépend que de M , M_0 étant fixé); les composantes du mouvement tangentiel réduit (à la distance r_0)

$$O_1 = r_0 \mu_L \cos B, \quad O_2 = r_0 \mu_B,$$

la vitesse spatiale $\vec{u}$ a pour composantes u_1, u_2, u_3 sur le trièdre fondamental et, sur le trièdre associé, les vecteurs (orthogonaux deux à deux) :

$$\begin{aligned} \vec{T}_L & \text{ de mesure } r \mu_L \cos B = k(r_0 \mu_L \cos B) = k O_1, \\ \vec{T}_B & \text{ » } r \mu_B = k(r_0 \mu_B) = k O_2, \\ \vec{\rho} & \text{ » } \rho = O_3. \end{aligned}$$

Nous introduisons aussi le vecteur $\vec{T}$, vitesse tangentielle $\vec{T} = \vec{T}_L + \vec{T}_B$. Nous pouvons aussi considérer les vecteurs :

$\vec{\mu}$, mouvement propre ($\vec{\mu} \cdot \vec{\rho} = 0$);

$\vec{t}_L$ et $\vec{t}_B$, composantes de la vitesse tangentielle réduite $\vec{t} (\vec{t} = \vec{t}_L + \vec{t}_B)$, et écrire la formule fondamentale

$$\vec{u} = r \vec{\mu} + \vec{\rho} = \vec{T}_L + \vec{T}_B + \vec{\rho} = k(\vec{t}_L + \vec{t}_B) + \vec{\rho} = \vec{T} + \vec{\rho} = k \vec{t} + \vec{\rho}.$$

kO_1, kO_2 et O_3 sont pourvues d'erreurs d'observation $k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \varepsilon_3$ et

susceptibles de dispersions respectives (provenant de la dispersion des vitesses spatiales) de carrés respectifs E'_1, E'_2, E'_3 , autour des valeurs moyennes L_1, L_2, L_3 .

Tableau récapitulatif : vecteurs considérés.

Nom.	Symbole.	Mesure.	Direction.	Composantes fonda- mentales.
Position.....	$\vec{x}$	$r = kr_0$	(L, B)	x_l
Vitesse spatiale.....	$\vec{u}$	—	—	u_l
Vitesse de groupe.....	$\vec{U}$	U	Opposée de l'apex	U_i
Mouvement propre.....	$\vec{\mu}$	μ	$\vec{\mu} \cdot \vec{\rho} = 0$	μ_i
Vitesse tangentielle.....	$\vec{T}_L = k \vec{t}_L$	$r \mu_L \cos B = k O_1$	Définie par g_{i1}	$k O_{i1}$
	$\vec{T}_B = k \vec{t}_B$	$r \mu_B = k O_2$	Définie par g_{i2}	$k O_{i2}$
	$\vec{T} = \vec{T}_L + \vec{T}_B$	—	$\vec{T} \cdot \vec{\rho} = 0$	kt_i
» réduite.....	$\vec{t}_L$	$r_0 \mu_L \cos B = O_1$	Définie par g_{i1}	O_{i1}
	$\vec{t}_B$	$r_0 \mu_B = O_2$	Définie par g_{i2}	O_{i2}
	$\vec{t} = \vec{t}_L + \vec{t}_B$	t	$\vec{t} \cdot \vec{\rho} = 0$	t_i
» radiale.....	$\vec{\rho}$	$\rho = O_3$	Définie par g_{i3}	$O_{i3} = \rho_i$

Supposant les vitesses distribuées normalement autour d'une vitesse moyenne U, de composantes fondamentales U_1, U_2, U_3 , selon une loi de moments seconds A_{ij} , il vient

$$L_k = \sum_i U_j g_{jk} \quad (j = 1, \dots, 3),$$

$$E'_k = \sum_i \sum_j A'_{ij} g_{ik} g_{jk} \quad (i = 1, \dots, 3; j = 1, \dots, 3),$$

A'_{ij} étant les moments seconds centrés de la distribution des vitesses.

Nous serons amenés (§ 23) à considérer également les paramètres γ et A_{ij} qui vérifient les relations

$$A'_{ij} = \gamma A_{ij}$$

et D^2 , carré de la dispersion des vitesses

$$D^2 = \gamma (A_{11} + A_{22} + A_{33}).$$

L'unité de vitesse est le km.s⁻¹. Les unités de distance et de mouvement propre seront supposées normalisées de manière que $r\mu$ soit exprimé en km.s⁻¹. Les distances sont exprimées en parsecs.

smoothing	lissage,
statistics	estimateur (fonction), estimation (valeur numérique),
test	épreuve,
tested	contrôlée (hypothèse);

et les symboles suivants :

$\psi_x(x_1, \dots)$ ou $\psi_{.x}$, loi de distribution de $x_1, \dots$;

$\psi_x(x, \dots/y, \dots)$, loi de distribution conditionnelle de $x, \dots$;

$P(a, b, c, \dots)$, vraisemblance de l'échantillon considéré en fonction des paramètres $a, b, c, \dots$;

$$P(a, b | c) = \max_{(c)} P(a, b, c);$$

$$P_n = \max_{L_i, k, \gamma} P(L_i, k, \gamma A_{ij}/0);$$

x^E , estimation de x obtenue en appliquant une technique de maximum de vraisemblance;

$\chi_i^2(a, b)$, estimateur relatif à la signification de a et de b , ayant une loi de distribution tendant vers la loi du χ^2 à i degrés de liberté;

n , nombre d'objets dans un échantillon;

σ_x , erreur quadratique ou dispersion portant sur la quantité x (qu'il s'agisse d'erreurs de mesure ou d'incertitude d'échantillonnage).

CHAPITRE I.

LES DONNÉES D'OBSERVATION.

4. Choix des étoiles naines. — Nous nous sommes borné aux étoiles naines, qui sont très proches : nous pourrions alors négliger ε (absorption interstellaire), σ_M (dispersion des magnitudes absolues), la rotation galactique et les erreurs de mesure sur le mouvement propre et la vitesse radiale. De plus, notre but essentiel est la discussion statistique des parallaxes trigonométriques; or, les naines étant proches (nous nous limiterons à $m < 7,5$ et à $r < 31,6$ donc : $\Pi > 0'',03$) sont les seules étoiles pour lesquelles les parallaxes trigonométriques puissent être prises en considération : le volume $\Pi > 0'',03$ n'inclut qu'une dizaine de géantes.

5. Homogénéité des échantillons. — Il importe, avant tout, de considérer des groupes homogènes d'étoiles : si deux étoiles ont des spectres identiques, on peut admettre qu'elles sont de même famille.

Malheureusement, pour la plupart des étoiles, même pour les plus

lumineuses, on ne connaît — faute de temps pour dépouiller entièrement des milliers de spectres — que le type spectral (déterminé « à vue » ou d'une manière plus quantitative mais encore peu fréquente par le rapport de l'intensité de deux ou de plusieurs raies) et la classe de luminosité, dans le système du Mont Wilson ou dans celui de Morgan. Le catalogue de Wilson donne pour 7 000 étoiles environ, dont 3 111 naines, la classe de luminosité dans le premier de ces systèmes et le type spectral (système de Harvard) : nous ne nous servons que de cet échantillon. Les étoiles sont réparties en groupes, dont chacun s'étendra sur deux dixièmes de types spectraux (dF_0 , dF_1 ...- dK_0 , dK_1). Chaque groupe comprend entre 20 et 250 étoiles. Nous avons écarté les étoiles doubles (spectroscopiques, visuelles ou photométriques) (Appendice IV).

Si nécessaire que soit ce travail rigoureux de classification, il n'est pas suffisant. Des étoiles de constitutions très différentes peuvent, en effet, avoir des spectres presque identiques, encore plus difficiles à distinguer entre eux que ceux des naines et des géantes (et pourtant quelque grossière que soit cette classification, elle n'est pas faite pour 50 % des étoiles du catalogue de Wilson).

Un exemple illustrera ce fait : parmi les sous-géantes F, dont 199 sont classées dans le « Wilson » 17 se sont révélées avoir des raies élargies que Greenstein a pu mesurer et attribuer à une grande vitesse de rotation équatoriale (100 km.s^{-1}) : la population n'est donc probablement pas la même que celle des étoiles « normales »; Schatzman a eu l'idée d'étudier la magnitude absolue et la dispersion des vitesses de ce petit groupe; en appliquant les méthodes exposées précédemment, nous avons pu montrer qu'effectivement leurs propriétés cinématiques étaient très singulières pour des sg F, la dispersion des vitesses étant estimée à 18 km.s^{-1} au lieu de 50, écart significatif même pour un si petit échantillon (Schatzman-Rigal, 1956).

Un problème, analogue mais encore plus compliqué, se pose au sujet des « étoiles à grandes vitesses ». L'examen des catalogues de vitesses spatiales montre un grand nombre (15 %) d'étoiles ayant des vitesses de l'ordre de 100, et jusqu'à 300 km.s^{-1} , en désaccord avec l'hypothèse d'une répartition normale de dispersion 50 km.s^{-1} . Leurs vecteurs-vitesses ont une répartition très spéciale, pointant tous vers l'hémisphère centré autour d'une direction ($L = 270^\circ$, $B = 0^\circ$), perpendiculaire à celle du centre galactique; Oort (Oort, 1926) a suggéré l'explication suivante : il s'agit d'étoiles nées au voisinage du centre galactique et décrivant une orbite très elliptique, à la différence des étoiles à petite vitesse condamnées à décrire une orbite quasi-circulaire et à rester à une distance constante du centre de la galaxie. Il s'agirait donc d'une population très différente de celle des étoiles formées dans des régions aussi excentriques que la nôtre et il faut s'attendre à ce que les propriétés spectrales en soient singulières. Miss Roman a étudié leurs spectres et

est arrivée à la conclusion qu'il en était bien ainsi : faiblesse des raies métalliques et des raies du cyanogène; grande intensité de la bande G; tous ces critères concordants permettraient de classer *presque* toutes les étoiles à grandes vitesses comme des étoiles de population « jeune » (Roman, 1952). Même si les étoiles de cette population, définie spectroscopiquement, jouissaient d'une loi de distribution des vitesses très dispersée, il y aurait des membres de petite vitesse, de même qu'une étoile « normale » pourrait se trouver sur la queue de la loi de distribution et donc avoir une grande vitesse, ce qui semblait expliquer le « presque » souligné quelques lignes plus haut. Le problème semblait réglé; il suffirait d'avoir un spectre dispersé pour être en mesure de classer toute étoile en deux groupes; à l'intérieur de chacun, la dispersion des vitesses est gaussienne, seuls le centre et la grandeur des axes diffèrent. On retrouvait ainsi l'hypothèse des deux courants de Kapteyn, rajeunie et surtout douée d'un sens physique.

Malheureusement, des travaux récents (Fehrenbach et Duflot, 1957) semblent mettre en doute l'existence même de différences entre les spectres d'étoiles considérées par Miss Roman et les spectres d'étoiles « normales » (de plus, la sélection observationnelle joue très fortement en faveur de ces étoiles). La discussion sort du cadre de ce travail; de plus, il s'agit de travaux trop récents pour ne pas demander à être développés.

Nous adopterons, en ce qui nous concerne, l'attitude suivante qui nous semble la seule possible actuellement, sans comporter de danger excessif.

CHOIX DES ÉTOILES.

Nous examinerons les 3111 étoiles classées « d » dans le catalogue de Wilson, et nous éliminerons toutes les étoiles ayant effectivement une vitesse supérieure à 100 km.s^{-1} ou classées dans le catalogue de Miss Roman (Roman, 1955) ainsi que les étoiles présentant d'indéniables particularités spectrales. Les étoiles doubles seront classées à part, quelle que soit leur nature. La séquence principale sera partagée en 18 tronçons de même largeur (0,2 type spectral) comprenant chacun entre 20 et 250 membres. Nous éprouverons, aussi souvent que nous le pourrons, l'hypothèse de l'homogénéité du groupe considéré.

Nous avons inclus les étoiles A_5 , A_8 , A_0 et les sous-géantes dans le programme de calcul.

6. Les données d'observation, les mouvements propres. —

Le catalogue le plus homogène en est le *General Catalogue* (1937) qui indique 33 000 résultats, obtenus par la méthode du « méridien »; c'est-

à-dire tels que les deux composantes du mouvement propre puissent être considérées comme mesurées indépendamment. Pour accroître encore cette homogénéité, nous avons fait sur chaque étoile les corrections « classiques » ramenant au système $\frac{FK_3 + N_{30}}{2}$ et éliminant le terme dû à la rotation galactique (Delhaye et Blaauw, 1949).

Pour les étoiles que nous avons choisies (naines très proches), ces termes sont négligeables et nous pouvons considérer les mouvements propres du G. C. comme très précis (les erreurs sont certainement très inférieures à 10 %). Notre programme de calcul a été établi de manière à tenir compte des corrections indiquées; il pourra ainsi s'appliquer sans modification aux étoiles lointaines, géantes ou variables.

7. Les vitesses radiales. — Pour les mêmes raisons, les vitesses radiales proviennent du catalogue de R. E. Wilson : pour les naines, elles sont toutes de fort poids (*a*, *b*, ou *c*). Une correction a été faite pour tenir compte de la rotation galactique en prenant pour A et B les mêmes valeurs que celles choisies par Blaauw et Delhaye pour dresser leurs tables de corrections relatives aux mouvements propres.

Dans ces conditions, l'erreur de mesure des vitesses radiales ne dépasse pas quelques kilomètres par seconde, ce qui correspond à une erreur moyenne voisine de 5 % et inférieure certainement à 10 %.

8. Magnitudes visuelles et types spectraux. — La magnitude *m* est une donnée d'observation bien connue malgré les difficultés d'étalonnage. Il en est de même de la classe de luminosité et du type spectral pour lesquels nous adoptons les valeurs données dans le catalogue de Wilson et que nous pouvons considérer comme bien connues.

9. Distances réduites et mouvements tangentiels réduits. — La quantité *r*, liée à la Terre, n'est pas une donnée d'observation, et l'on ne sait rien *a priori* de sa loi de distribution, certainement très dispersée. Ainsi, depuis C. V. L. Charlier, lui substitue-t-on souvent la *distance réduite*, ou distance d'une étoile de même magnitude apparente mais de magnitude absolue *M*₀ arbitraire mais fixée (Charlier, 1926).

La distance d'une étoile proche, pour laquelle l'absorption interstellaire est négligeable, peut en effet être mise sous la forme d'un produit de deux facteurs *r*₀ (ne dépendant que de *m*) et *k* (ne dépendant que de *M*). Pour ce faire, il suffit de se donner une magnitude arbitraire *M*₀ et d'écrire

$$r = 10^{\frac{m - M + 5}{5}} = 10^{\frac{m - M_0 + 5}{5}} \cdot 10^{\frac{M_0 - M}{5}} = r_0 (m - M_0) k (M - M_0).$$

$r_0 = 10^{\frac{m - M_0 + 5}{5}}$ « distance réduite » peut être considérée comme une

donnée d'observation (M_0 étant fixée et quelconque), k sera une inconnue, équivalente à M et liée intrinsèquement à l'étoile.

La vitesse de l'étoile a pour composantes sur le trièdre associé à la direction (L, B) les trois quantités

$$\begin{aligned} r\mu_L \cos B &= k r_0 \mu_L \cos B = k O_1, \\ r\mu_B &= k r_0 \mu_B = k O_2, \\ \rho &= O_3. \end{aligned}$$

10. Choix des données. — Nous considérerons comme données d'observation les seules quantités

$$\begin{aligned} O_1 &= r_0 \mu_L \cos B, \\ O_2 &= r_0 \mu_B, \\ O_3 &= \rho \end{aligned}$$

et le type spectral de l'étoile, ainsi que sa classe de luminosité et ses coordonnées (L, B).

Pour les étoiles naines proches communes aux catalogues de Wilson et au G. C., nous pouvons négliger les erreurs d'observation inférieures à 5 km.s⁻¹, commises sur les O_i .

CHAPITRE II.

MÉTHODES GÉNÉRALES D'ESTIMATION DES PARAMÈTRES DES LOIS $\psi_r(r)$ OU $\psi_k(k)$.

11. Méthode de Schwarzschild. — Comment la connaissance des mouvements propres et des vitesses radiales des étoiles d'un groupe peut-elle nous permettre d'estimer les magnitudes absolues ou les distances des étoiles considérées ?

Pour le voir, remarquons que le mouvement propre $\vec{\mu}$, étant une vitesse angulaire n'est comparable à la vitesse radiale $\vec{\rho}$ qu'après multiplication par un facteur ayant les dimensions d'une longueur, en fait la distance r de l'étoile, ainsi qu'il appert des formules donnant la vitesse $\vec{u}$ relative au Soleil,

$$(I) \quad \vec{u} = r\vec{\mu} + \vec{\rho} = k\vec{t} + \vec{\rho} \quad (\vec{\mu} \perp \vec{\rho}).$$

On ne peut donc atteindre $\vec{u}$ qu'en connaissant les données d'observation très hétérogènes r , $\vec{\mu}$ et $\vec{\rho}$. Réciproquement, on peut avoir des renseignements sur la répartition des distances d'étoiles d'un groupe en

comparant l'information portée sur les vitesses de ces étoiles par leurs mouvements propres et leurs vitesses radiales.

Soit $\psi_u(u_1, u_2, u_3)$ la loi de distribution des vitesses, on peut écrire de suite les deux formules résolvant théoriquement le problème posé (Trumpler et Weaver, 1953)

$$(2) \quad \psi_\rho(\rho|L, B) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_u(u_1, u_2, u_3) d(r\mu_L \cos B) d(r\mu_B),$$

$$(3) \quad \psi_\mu(\mu_L \cos B, \mu_B|L, B) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty r^2 \psi_r(r) \psi_u(u_1, u_2, u_3) d\rho dr.$$

Malheureusement, la détermination exacte de ψ_u à partir de (2), puis celle de $\psi_r(r)$ à partir de (3) connaissant ψ_u et ψ_μ donnent lieu à des calculs inextricables, surtout si l'on tient compte des erreurs de mesure sur ρ et sur les composantes μ_L et μ_B (ou μ_α et μ_δ) de μ . Citons, cependant, les recherches classiques de Schwarzschild — remplaçant la résolution de (1) par l'estimation, par la méthode des moindres carrés, des moments de la distribution ψ_u supposée gaussienne — et la méthode élégante de détermination point par point de ψ_u suggérée par Ambartsumian (1936) et reprise par Nahon (1956 et 1957 A).

12. Méthode de Charlier. — Charlier et ses élèves (Gyllenberg, 1915; Malmquist, 1928) admettent pour ψ_u une loi normale dont ils estiment les paramètres par la méthode des moments. Ils espéraient même obtenir des indications sur la dispersion des distances.

Malheureusement, cette méthode faisait appel aux moments du quatrième ordre d'une population supposée astrophysiquement homogène et dont les vitesses sont supposées réparties de manière normale. Au début de ce siècle les données d'observation, et notamment la classification spectrale, n'étaient ni assez nombreuses ni assez bonnes, (on ignorait notamment l'existence des « étoiles à grande vitesse » rendant l'excès de la distribution fortement positif) pour qu'on doive s'étonner de l'échec des tentatives de Gyllenberg pour estimer σ_M dispersion des magnitudes.

En fait, aucune méthode fondée sur le calcul des moments de la distribution ψ_u ne peut être utilisée pour l'estimation de σ_k , car elle devrait faire appel aux moments d'ordre 4 d'une population suspecte d'un excès fortement positif et dont on ne possède qu'un petit échantillon. Tout au plus, peut-on espérer avoir une borne supérieure pour σ_k , donc pour σ_m , « largeur » de la séquence principale dans le diagramme d'Hertzsprung-Russell.

13. Techniques des moindres carrés. — Pour les étoiles naines du moins, on peut supposer σ_k très petit et même nul d'après ce que nous

avons vu. Dans ces conditions, la détermination de k s'effectue en deux étapes.

1° On estime un ou plusieurs paramètres liés à la distribution des vitesses, par exemple, la vitesse moyenne des étoiles considérées, ou les axes de l'ellipsoïde des vitesses.

Cette estimation s'effectue à partir de la donnée des seules vitesses radiales, fournissant par exemple $U(\rho)$; puis, des seuls mouvements propres réduits, en fixant pour M_0 donc pour k_0 une valeur arbitraire; on obtient ainsi $U(kt/k_0)$.

2° On compare les deux valeurs précédentes en cherchant à rendre $U(kt/k_0)$ aussi voisin que possible de $U(\rho)$; on en déduit une estimation de la magnitude absolue des étoiles du groupe considéré.

Les méthodes sont, en général, telles qu'on obtient $\left(\frac{1}{k}\right)$.

Bien que LA COMPARAISON DES DISPERSIONS SOIT DEUX FOIS PLUS EFFICACE QUE CELLE DES MOYENNES, DANS LE CAS D'UNE POPULATION GAUSSIENNE, on considère généralement U , de manière à ne pas avoir à considérer les moments supérieurs d'une distribution susceptible d'un excès fortement positif. Traitant l'équation

$$(4) \quad O_3 = \sum_i U_i g_{i3} = L_3$$

par la méthode des moindres carrés, on estime $U_i(\rho)$ et de même $U(kt/k_0)$ à partir de

$$(5) \quad k_0 O_1 = \sum_i U_i g_{i1} = L_1,$$

$$(6) \quad k_0 O_2 = \sum_i U_i g_{i2} = L_2.$$

Mineur a perfectionné la méthode en pondérant les équations telles que (4) pour tenir compte de l'erreur de mesure ε_3 et, surtout, de la dispersion sur O_3 (cf. § 2) : il est amené à résoudre le système linéaire en U_i [E'_3 est une fonction de (L, B) dépendant des paramètres supposés connus A'_{ij}]

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial U_i} \left[\sum \frac{(O_3 - L_3)^2}{\varepsilon_3^2 + E'_3} \right] = 0.$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} L_3 &= \sum_i U_i g_{i3}, \\ &= \text{espérance mathématique de } O_3, \\ &= \text{projection sur l'axe } (L, B) \text{ de la vitesse de groupe } U \end{aligned}$$

et que

$$E'_3 = \text{dispersion}^2 \text{ de } L_3 = \sum_i \sum_j A'_{ij} g_{i3} g_{j3},$$

= carré de la longueur du demi-diamètre de l'ellipsoïde des vitesses,
correspondant à la direction (L, B).

Une équation analogue s'applique aux vitesses tangentielles réduites. Les calculs étant longs, cette méthode — quelque correcte qu'elle soit théoriquement, n'a jamais été utilisée et la note l'exposant (Mineur, 1944) semble être passée inaperçue.

En ce qui concerne la comparaison des résultats obtenus à partir des vitesses radiales et à partir des vitesses tangentielles, la situation n'est pas plus claire. Il s'agit de chercher λ tel que l'accord soit maximum entre les $\lambda U_i(kt/k_0)$ et les $U_i(\rho)$. On prendra alors la quantité λk_0 comme estimateur de k .

L'échantillon des vitesses étant fini et souvent même très peu nombreux ($n = 50$), $U(\rho)$ n'est pas sur la droite $U(kt)$. L'écart est souvent même significatif (Appendice II).

Une première idée est d'écrire que :

$$\lambda^2 = \frac{\sum_i U_i^2(\rho)}{\sum_i U_i^2(kt/k_0)}.$$

Le moins qu'on puisse dire de cet estimateur est qu'il n'est certain-

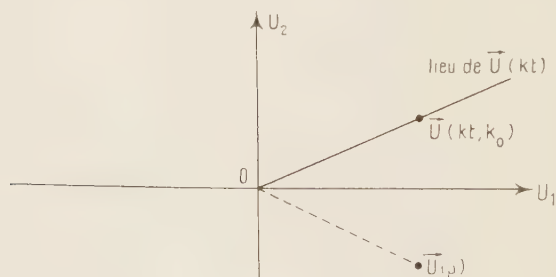


Fig. 2.

nement ni correct, ni même efficace et qu'il ne tient aucun compte de la loi de répartition d'échantillonnage de $U(\rho)$ et de $U(kt)$.

Ainsi Mineur prend-il pour λ la moyenne pondérée des trois λ_i

$$\lambda_i = \frac{U_i(\rho)}{U_i(kt/k_0)},$$

la pondération tenant compte de l'erreur sur $U_i(kt/k_0)$ et $U_i(\rho)$ fournie par la méthode des moindres carrés.

Cette méthode n'est guère plus satisfaisante, ni même correcte. Montrons-le sur un exemple : dans le cas de la figure 2, on serait amené à la solution

$$\lambda = 0 \quad \text{à partir de} \quad \lambda_i = \frac{U_i(\rho)}{U_i(kt/k_0)}$$

et

$$\frac{1}{\lambda} = 0 \quad \text{à partir de} \quad \frac{1}{\lambda_i} = \frac{U_i(\rho)}{U_i(kt/k_0)}.$$

14. Perfectionnement récent de la technique proposée par Mineur. — En fait, l'application de la méthode des moindres carrés conduit à la densité de probabilité $\psi_U(\tilde{u}(\rho))$, ayant pour centre le point de coordonnées $U_i(\rho)$, dont les axes dépendent de $\psi_\Delta(L, B)$ loi de répartition des directions (L, B) et de ψ_u et ne sont pas parallèles aux axes galactiques; de même, pour $\psi_{k_0}(U(k_0t))$.

Une méthode meilleure consisterait à estimer simultanément λ et (U_1, U_2, U_3) en cherchant le maximum de

$$\psi_1(U_1, U_2, U_3) \psi_{k_0 \lambda}(U_1, U_2, U_3).$$

Nous avons appliqué cette technique à 200 étoiles dG₀ (Rigal, 1955), mais elle ne nous satisfaisait pas pleinement, en ce qu'elle faisait appel à la méthode des moindres carrés. De plus, malgré la rapidité des calculs numériques qu'elle impliquait, elle ne nous semblait pas tenir compte de la nature physique du problème d'estimation de k .

CHAPITRE III.

RÉSULTATS GÉNÉRAUX DONT IL DOIT ÊTRE TENU COMPTE.

Avant d'exposer la méthode que nous proposons et que nous avons appliquée ces dernières années, il importe — nous semble-t-il — de rappeler brièvement les résultats acquis d'une manière définitive et dont il devra être tenu compte si l'on veut adapter les méthodes statistiques aussi étroitement que possible à leur objet.

15. Indépendance pour un groupe homogène des u_i , x_i et de M

Pour les étoiles d'une même population (et nous ne considérerons que des groupes homogènes d'étoiles), nous pouvons admettre que la loi de distribution des composantes u de la vitesse x , de la position et

de la magnitude absolue M est de la forme

$$\psi(u_i, x_i, M) \equiv \psi_u(u_i) \psi_x(x_i) \psi_M(M).$$

16. Loi de distribution des magnitudes absolues. — De nombreux estimateurs de la largeur de la séquence principale dans le diagramme d'Hertzsprung-Russell ont été élaborés : méthodes directes (établissement de ce diagramme à partir des parallaxes trigonométriques), comparaison des mouvements propres et des vitesses radiales (soit par la considération des dispersions des vitesses radiales et tangentielles réduites, soit par celle des coefficients de corrélation entre les composantes $\vec{l}_I$ et $\vec{l}_{II}$ d'une part, $\vec{l}$ et $\vec{\rho}$ de l'autre), étude des amas d'étoiles (la dispersion des magnitudes visuelles renseigne de suite sur celle des magnitudes absolues, mais il n'est pas correct d'assimiler la loi de distribution des magnitudes des étoiles, jeunes, d'amas à celles des étoiles, de tout âge, du voisinage du Soleil) et, enfin, considérations théoriques sur l'évolution et l'âge des étoiles.

Aucune des estimations n'a révélé l'existence d'une dispersion *significative* des magnitudes. Ceci ne veut pas dire qu'une telle dispersion n'existe pas, mais que les données d'observation sont trop mauvaises et trop peu nombreuses pour en mettre une en évidence : les parallaxes trigonométriques, par exemple, sont pourvues d'erreurs — de l'ordre de la magnitude — certainement supérieures à la dispersion que nous voudrions estimer. De même, la méthode de Gyllenberg, sur laquelle nous reviendrons, oblige à considérer les moments quatrièmes d'une population supposée normale mais qui possède, en fait, un excès certainement positif.

Il semble :

1° que nous puissions admettre que la dispersion des magnitudes pour des naines de même température effective est inférieure à 1 magnitude, et même, presque certainement, inférieure à 0,5 magnitude (rappelons qu'une incertitude de 0,5 sur les magnitudes absolues correspond à une incertitude voisine de 25 % pour les distances);

2° que nous pouvons donc la négliger, sous réserve du contrôle de cette hypothèse et de vérification de la stabilité des résultats par rapport à celle-ci.

17. Loi de distribution $\psi_{x,r}(x)$ des positions stellaires. — $\psi_{x,r}$ est certainement régulière ($\psi_{x,r} \rightarrow 1$) pour les étoiles naines de notre voisinage, mais la sélection observationnelle perturbe considérablement la loi $\psi_{x,r}$.

pour les étoiles figurant dans les catalogues. Qu'on considère des coordonnées galactiques ou équatoriales, $\psi_{\Delta}(L, B) \neq \cos B$. A plus forte raison $\psi_r(r) \neq r^2$; la sélection observationnelle joue un rôle énorme dès la 7^e magnitude (ce qui correspond à une vingtaine de parsecs pour les naines) : 100 000 étoiles ont une magnitude apparente inférieure à 8 et nous avons vu qu'il n'y a guère que quelques milliers de parallaxes connues avec une bonne précision. Il est donc normal que les programmes de parallaxes (et souvent aussi de vitesses v) choisissent de préférence les étoiles ayant une forte probabilité d'être proches, en fait, les étoiles très brillantes ou à grand mouvement propre.

Cette sélection observationnelle concerne donc à la fois la loi de distribution des magnitudes absolues et surtout la loi de distribution des vitesses.

Nous ne ferons aucune hypothèse sur $\psi(r)$. Quant à $\psi_{\Delta}(L, B)$, on peut supposer qu'elle possède les symétries $\psi_{\Delta}(L, B) \equiv \psi_{\Delta}(\pi - L, B) \equiv \psi_{\Delta}(L, -B)$ mais non qu'elle est régulière.

Nous partagerons nos étoiles en trois groupes, selon leur magnitude visuelle :

Groupe (a) :	$m < 6,6$;
» (b) :	$6,6 \leq m < 7,5$;
» (c) :	$7,5 \leq m$.

18. Loi de distribution $\psi_u(u_i)$ des vitesses spatiales. — Les dynamiciens (Lindblad, Camm, Nahon) ont montré qu'il n'y a aucune raison théorique pour supposer que la loi ψ_u est normale (Nahon, 1957 B); Van Wijk (1956), partant d'hypothèses raisonnables sur les conditions de formation des étoiles, aboutit à une distribution qualitativement fort proche de celle observée : l'écart avec une loi normale est net aux grandes vitesses (et ce fait peut expliquer l'existence des étoiles de Oort) mais non aux faibles vitesses (c'est-à-dire différant de la vitesse moyenne de moins de 60 km. s⁻¹) : compte tenu du choix des étoiles considérées (§ 5) nous pourrions considérer la structure globale des vitesses comme normale.

L'étude de la structure fine des vitesses a permis de mettre en évidence des irrégularités dans l'espace des vitesses : courants du Taureau, de la Grande Ourse, du Centaure et « des étoiles G » (Delhaye, 1951, 1953 et 1957). De nombreux problèmes se sont posés à leur sujet (*aucun contrôle véritable de signification n'a été fait*), mais la structure globale de la distribution des vitesses ne peut être considérée comme perturbée gravement par ces irrégularités.

Nous pourrions considérer ψ_u comme une loi normale, à condition de contrôler que les résultats trouvés sont stables par rapport à l'existence d'un excès positif d'étoiles à grande vitesse.

CHAPITRE IV.

MÉTHODE ET TECHNIQUE PROPOSÉES.

19. Exigences théoriques. - Parmi les quantités à estimer, les plus riches en signification astrophysique et cosmologique sont relatives au « zéro », à la largeur et surtout à la *pente de la séquence principale*. La considération de la dispersion des vitesses sera aussi utile, principalement pour savoir si cette séquence est unique ou formée de deux sous-séquences distinctes.

Ayant estimé les parallaxes réduites moyennes, nous comparerons les parallaxes trouvées pour les étoiles aux parallaxes trigonométriques que nous introduirons seulement à ce dernier stade, ce qui évite de mélanger des quantités non comparables entre elles et permet de garder un sens et une réalité physique aux estimations faites.

Les exigences suivantes devront autant que possible être réalisées :

1° *Efficacité des estimateurs*, de manière à tenir compte de l'extrême rareté du matériel considéré comme utilisable, et de l'impossibilité d'obtenir, avant de longues années et sans un énorme travail d'observation et de dépouillement, de nouveaux résultats.

2° *Souplesse de la technique* s'adaptant aux réalités physiques concernant tant le matériel étudié que les méthodes de mesure. Les calculs, longs et fastidieux, seront faits sur machines électroniques à tambour. On en profitera pour remettre à jour — sur cartes perforées — un *catalogue* complet, homogène et moderne, de résultats concernant les vitesses d'étoiles et leurs composantes.

3° *Convergence de l'estimateur*, les échantillons étant peu fournis (de 20 à 100 membres). Par contre, la correction n'est pas une exigence fondamentale : il n'y a pas grand sens à préférer avoir une espérance mathématique correcte pour la moyenne arithmétique plutôt que pour la moyenne géométrique ou harmonique.

4° *Homogénéité* : on évitera formellement de mélanger des données aussi hétérogènes que celles concernant les mouvements propres (ou les mouvements tangentiels réduits), les vitesses radiales et les parallaxes.

Dans ces conditions, l'emploi d'une méthode fondée sur le principe du *maximum de vraisemblance* s'impose (Dugué, 1937).

20. Calcul de Log P. - Une première étape sera de calculer la vraisemblance P de l'ensemble des données d'observation O_i , compte tenu des hypothèses faites (et qui feront l'objet d'un contrôle du double point

de vue de leur conformité aux résultats et de leur influence sur les estimations obtenues).

Supposons :

1° que (§ 15)

$$\psi^{\text{SP}}(u_i, x_i, M) = \psi_u^{\text{SP}}(u_i) \psi_x^{\text{SP}}(x_i) \psi_M^{\text{SP}}(M),$$

l'indice rappelant ici que nous admettons l'homogénéité de l'échantillon choisi (§ 5) sans que joue la sélection observationnelle (§ 17);

2° que $\psi_M(M)$ est concentrée en un point : $\sigma_K = 0$ ou $\sigma_K = 0$ (§ 16);

3° que $\psi_u(u_i)$ est une loi normale (§ 18);

4° que les erreurs de mesure sur les données d'observation O_i et O_{ij} sont négligeables (§ 10).

La vraisemblance P est donnée de suite par la formule

$$\begin{aligned} (8) \quad \text{Log P}(U_i, k; \gamma A_{ij}, 0) = & -\frac{1}{2} \sum \left[\frac{(O_3 - L_3)^2}{E_3 + \varepsilon_3^2} + \frac{(k O_1 - L_1)^2}{E_1 + k^2 \varepsilon_1^2} + \frac{(k O_2 - L_2)^2}{E_2 + k^2 \varepsilon_2^2} \right] \\ & - \frac{1}{2} \sum \text{Log}[(E_1 + k^2 \varepsilon_1^2)(E_2 + k^2 \varepsilon_2^2)(E_3 + \varepsilon_3^2)] \\ & + n \text{Log} \frac{k^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} + n P''. \end{aligned}$$

21. Formule asymptotique pour Log P. — Le terme P'' exprime la liaison entre L_1 , L_2 et L_3 ; il est de l'ordre de $\frac{1}{n}$ pour une loi de distribution $\psi_u(u_i, x_i)$ symétrique. On peut donc le négliger, ce qui simplifie les calculs : les estimations resteront asymptotiquement correctes et les calculs seront beaucoup plus simples. Par contre, il s'introduira une légère incorrection sur les estimations des erreurs d'échantillonnage.

Nous pourrions également négliger les ε_i .

Les E'_i sont des fonctions de (L, B) dépendant des paramètres A'_{ij} (§ 2 et 13). Nous verrons (§ 23) qu'il sera commode d'écrire les A'_{ij} sous la forme

$$(9) \quad A'_{ij} = \gamma A_{ij}$$

en introduisant le paramètre γ , lié à la grandeur de l'ellipsoïde des vitesses alors que les A_{ij} sont liés à la forme et à la direction de cet ellipsoïde.

Dans ces conditions, on peut écrire

$$(10) \quad E'_k = \gamma E_k \quad \left(E_k = \sum_i \sum_j A_{ij} g_{ik} g_{jk} \right)$$

et la formule (8) s'écrit

$$(11) \quad \text{Log } P(U_i, k, \gamma \Lambda_{ij}, o) \\ = - \frac{1}{2\gamma} \sum^* \left[\frac{(O_3 - L_3)^2}{E_3} + \frac{(k O_1 - L_1)^2}{E_1} + \frac{(k O_2 - L_2)^2}{E_2} \right] \\ + \frac{n}{2} \text{Log} \frac{k^3}{(2\pi\gamma\mathcal{E})^3},$$

$\mathcal{E}$, moyenne géométrique des E_i ($3n \text{ Log } \mathcal{E} = \sum^* \text{Log } E_1 E_2 E_3$) (rappelons que $L_i = \sum U_j g_{ji}$).

22. Estimateurs proposés. — Il est alors facile de chercher les valeurs U_i^E de U_i , k^E de k et γ^E de γ rendant P maximum.

Il vient immédiatement

$$(12) \quad U^E = V_i + k W_i,$$

V_i et W_i étant solution du système (4)

$$(13) \quad \left\| B_{ij} = \sum_i^* \sum_{j=1,2,3} \frac{g_{ij} g_{ji}}{E_j} \right\| \propto \| V_i + k W_i \| \\ = \left\| \sum_i^* \frac{O_{i3}}{E_i} + k \sum_i^* \left(\frac{O_{i1}}{E_i} + \frac{O_{i2}}{E_i} \right) \right\|.$$

Posons

$$(14) \quad (t, t) = \sum_i^* \left(\frac{O_{i1}^2}{E_i} + \frac{O_{i2}^2}{E_i} \right) - \sum_i^* \sum_l W_l \left(\frac{O_{i1}}{E_i} + \frac{O_{i2}}{E_i} \right) \\ = \sum_i^* \Omega_i^2 - \sum_i^* \sum_l W_l \tau_{il},$$

$$(15) \quad (t, \rho) = - \sum_i^* \sum_l W_l \frac{O_{i3}}{E_i} \\ = - \sum_i^* \sum_l V_l \tau_{il},$$

$$(16) \quad (\rho, \rho) = \sum_i^* \frac{O_{i3}^2}{E_i} - \sum_i^* \sum_l V_l \frac{O_{i3}}{E_i},$$

(4) Remarquons qu'à la différence du système (7) et des systèmes analogues en O_2 et O_3 , le premier membre de (13) fait jouer le même rôle à tous les g_{ij} : l'estimateur U_j^E fait jouer des rôles analogues aux informations O_i portées par le mouvement propre réduit et par la vitesse radiale de chaque étoile.

Il vient

$$(17) \quad \text{Log P}(k, \gamma A_{ij}, O/U_i) = -\frac{1}{2\gamma} [(t, t) k^2 + 2(t, \rho) k + (\rho, \rho)] \\ + \frac{n}{2} \text{Log} \frac{k^4}{(2\pi\gamma\mathcal{E})^4}.$$

La quantité précédente par rapport à γ est maximum pour

$$(18) \quad \gamma^E = \frac{(t, t) k^2 + 2(t, \rho) k + (\rho, \rho)}{3n}$$

et vaut alors

$$(19) \quad \text{Log P}(k, \gamma A_{ij}, O/U_i, \gamma) = n \text{Log} \frac{k^2}{(2\pi e \gamma^E \mathcal{E})^{\frac{3}{2}}}.$$

Dérivant par rapport à k , on voit que k^E est donné par

$$(20) \quad (t, t) k^{E2} + 2(t, \rho) k^E + (\rho, \rho) = 3k^E [(t, t) k^E + (t, \rho)],$$

soit, finalement,

$$(21) \quad \boxed{U_i^E = V_i + k W_i}$$

$$(22) \quad \boxed{(t, t) k^{E2} - (t, \rho) k^E - 2(\rho, \rho) = 0 \quad [k^E > 0],}$$

$$(23) \quad \boxed{n \gamma^E = k^E (t, \rho) + (\rho, \rho),}$$

$$(24) \quad \boxed{\text{Log P}(A_{ij}, O/U_i, \gamma, k) = n \text{Log} \frac{k^{E2}}{(2\pi e \gamma^E \mathcal{E})^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous désignerons cette dernière quantité par Log P_0 .

23. Estimation des constantes A'_{ij} de l'ellipsoïde des vitesses. —

Il ne peut être question de différencier Log P_0 par rapport aux A'_{ij} pour estimer ces derniers : non seulement les calculs seraient inextricables, mais encore et surtout, ils n'auraient pas grand sens et ce, d'autant plus que nous verrons que Log P_0 dépend pratiquement très peu de la forme de l'ellipsoïde des vitesses.

A part les méthodes analogues à celle expliquée au paragraphe 11, déterminant ψ_{ii} à partir de la seule donnée de ψ_ρ ($\rho/L, B$), toute méthode directe d'estimation des constantes A'_{ij} devra faire appel, soit aux vitesses tangentielles réduites, soit aux vitesses spatiales, donc à la loi $\psi_k(k)$ ou aux parallaxes trigonométriques.

Toute une littérature, depuis plus de vingt ans, a été élaborée — notamment à Berkeley — de manière à tenir aussi bon compte que possible des innombrables difficultés qui jalonnent cette voie (Miss Wehlau, 1957).

La vitesse $\vec{u}$, par exemple, ne peut être connue qu'à partir de données très hétérogènes (r , $\vec{\mu}$ et $\vec{\rho}$) : la loi de répartition d'erreur sur $\vec{u}$ est compliquée, certainement pas normale, ni même intrinsèque (puisque'elle dépend de la direction de l'étoile, l'erreur fondamentale étant sur r , ou sur k) : ceci entraîne des difficultés théoriques dont l'étude a été négligée jusqu'à ce jour.

De plus, il existe peu de parallaxes suffisamment précises : la recherche de mouvements spatiaux laisse pratiquement de côté les étoiles de distance supérieure à 20 parsecs ; se borner aux étoiles à parallaxes raisonnablement bien connues (s'il en existe beaucoup, le Soleil mis à part !) revient à se condamner à étudier un nombre d'objets définitivement très limité et, en particulier, rend inutile la recherche de nouvelles vitesses radiales ou de nouveaux mouvements propres.

Les observateurs ont donné aux théoriciens des « délais de livraison » (minimum !) très différents pour les vitesses radiales (très rapidement, grâce à l'emploi de prismes objectifs), les mouvements propres (5 à 10 ans) et les parallaxes (pratiquement *sine die*) : il importe donc essentiellement de tenir compte des rendez-vous ainsi fixés pour l'élaboration des méthodes, ce qui n'est pas facile si l'on se borne à la méthode des mouvements spatiaux, les poids comparés des diverses informations concourant à leur obtention risquant de varier fortement et rapidement.

Une première approximation des A_{ij} peut être obtenue en appliquant la méthode des moments à l'équation

$$(25) \quad \begin{cases} \vec{u} = k\vec{t} + \vec{\rho}, \\ u_i = k(O_{i1} + O_{i2}) + O_{i3} = kt_i + \rho_i. \end{cases}$$

Au lieu d'appliquer directement cette méthode, nous avons été amené à la modifier légèrement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_i &= kt_i + \rho_i \\ u_i^2 &= (kt_i + \rho_i)^2 = k^2 t_i^2 + \rho_i^2 + 2kt_i \rho_i \\ &= k^2 t_i^2 + \rho_i^2 + 2(u_i - \rho_i) \rho_i = k^2 t_i^2 - \rho_i^2 + 2u_i \rho_{i3} \\ &= k^2 t_i^2 - \rho_i^2 + 2u_1(u_1 g_{13} + u_2 g_{23} + u_3 g_{33}) g_{12}. \end{aligned}$$

Prenant les moyennes (on suppose toujours k et u_i , donc k et t_i indépendants), nous sommes amené à résoudre le système linéaire symétrique et largement diagonal, donnant r_{ij} , donc A_{ij} en fonction de k et K

(K = espérance (k^2) : si $\sigma_k = 0$, $K = k^2$)

$$\begin{aligned}
 H_{ij} &= \frac{2}{n} \sum g_{i3} g_{j3}, & r_{ij} &= A'_{ij} + U_i U_j \quad (\text{moments non centrés}), \\
 (26) \quad & \left\| \begin{array}{cccccc} 1 - H_{11} & 0 & 0 & 0 & -H_{13} & -H_{12} \\ 0 & 1 - H_{22} & 0 & -H_{23} & 0 & -H_{12} \\ 0 & 0 & 1 - H_{33} & -H_{23} & -H_{13} & 0 \\ 0 & -H_{23} & -H_{23} & H_{11} & -H_{12} & -H_{13} \\ -H_{13} & 0 & -H_{13} & -H_{12} & H_{22} & -H_{23} \\ -H_{12} & -H_{12} & 0 & -H_{13} & -H_{23} & H_{33} \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{32} \\ r_{13} \\ r_{21} \end{array} \right\| \\
 &= \left\| \begin{array}{c} k \ell_1^2 - \bar{\varphi}_1^2 \\ k \ell_2^2 - \bar{\varphi}_2^2 \\ k \ell_3^2 - \bar{\varphi}_3^2 \\ 2(k \ell_3 \ell_2 - \bar{\varphi}_3 \bar{\varphi}_2) \\ 2(k \ell_1 \ell_3 - \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_3) \\ 2(k \ell_2 \ell_1 - \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_1) \end{array} \right\|.
 \end{aligned}$$

Les calculs sont plus faciles que par la méthode directe (il n'y a pas à calculer $\sum t_i t_j$ pour toutes les valeurs de i et de j). De plus, ils fournissent une limite inférieure pour k , car on doit avoir, par exemple, $r_{11} > 0$. (Généralement r se révèle une valeur trop faible pour K , ce qui revient à considérer qu'on mésestime les distances des naines proches). Par contre, cette technique, proposée par nous en 1955 (Rigal, 1955), présente les mêmes défauts fondamentaux que la technique classique, étant comme elle basée sur l'emploi des moments des composantes de la vitesse spatiale des étoiles.

A partir d'une première approximation $A'_{ij}^{(0)}$, nous pourrions en déduire $k^{(0)}$, reporter cette valeur dans le système (26) et itérer sur $k^{(m)}$ et $A'_{ij}^{(m)}$.

La corrélation est évidemment très forte entre k et la grandeur de l'ellipsoïde des vitesses : si l'on part d'un ellipsoïde très dispersé, on sera conduit à estimer de grandes valeurs pour les vitesses de manière à « remplir » cet ellipsoïde; t et ρ étant connus et orthogonaux, $\vec{u}$ ne peut être grand que si k l'est; l'influence de k sur D^E est encore plus évidente d'après (25).

Par contre, la liaison entre k_k et les paramètres de forme est certainement très faible. D'une part, en effet, ceux-ci n'interviennent que par l'intermédiaire des E_i , poids des informations portées par O_1 , O_2 , O_3 . D'autre part, nous pouvons remarquer que l'ellipsoïde des vitesses

s'adaptera au mieux à celui imposé, déterminant ainsi k_E , qui sera extremum, donc stationnaire, pour les A'_{ij} corrects. Ce fait est très important car il montre la stabilité de k_E par rapport aux A_{ij} , ce que les résultats numériques confirment (tableau III C); nous voyons qu'il n'est pas possible d'estimer les A'_{ij} en dérivant $\log P_0$.

Ces considérations nous ont amené à distinguer dans les A'_{ij} un paramètre γ de dimension (exprimée en $(\text{km.s}^{-1})^2$) et des paramètres A_{ij} , sans dimension, fixant la forme de l'ellipsoïde, et non sa grandeur. Nous écrivons donc

$$A'_{ij} = \gamma A_{ij}.$$

La liaison étant négligeable entre k et les A_{ij} , une seule itération suffit.

Pour des raisons d'homogénéité d'un groupe à un autre, nous avons préféré attacher à chaque groupe les ellipsoïdes (A), (F), (G), (S) correspondant respectivement aux distributions admises pour les étoiles A, F, G et à une distribution sphérique des vitesses (tableau III). Le calcul des vraisemblances et des estimations relatives à ces ellipsoïdes montre que k_F et k_A sont très voisins, différant généralement de moins de 2 % et que, par contre, k_S est significativement distinct des valeurs k_F et k_G (tableau III).

Nous avons calculé, pour chaque groupe et chaque ellipsoïde, $\text{Log } P_0$. La quantité

$$(27) \quad \Delta(X, Y) = n \text{Log} \frac{k_X}{\mathcal{E}_X \gamma_X^3} : \frac{k_Y}{\mathcal{E}_Y \gamma_Y^3},$$

dans laquelle k_X , γ_X et $\mathcal{E}_X$ désignent les valeurs de k_E , γ_E , $\mathcal{E}$ correspondant à (X), mesure et permet d'étudier la signification des ellipsoïdes choisis : F et G conviennent aussi bien aux étoiles dF et dG; par contre, la distribution est significativement distincte d'une distribution sphérique (tableau III C).

24. Signification (dans le cadre des hypothèses faites) des résultats obtenus. — Deux méthodes peuvent être employées et conduisent à des résultats équivalents et d'ailleurs concordants.

a. La loi de distribution des estimations tend asymptotiquement (Cramer, 1945 ou Kendall, 1948, t. II, p. 36) vers la loi normale définie par la matrice symétrique

$$\left\| -E \frac{\partial^2 \text{Log } P}{\partial U_i \partial U_j} \right\|_{i,j}, \quad \left(U_1 = k, U_2 = \frac{1}{\gamma} \right).$$

On est amené à inverser la matrice symétrique régulière d'ordre 5

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \frac{1}{\gamma^E} B_{11} & \frac{1}{\gamma^E} B_{12} & \frac{1}{\gamma^E} B_{13} & -\frac{1}{\gamma^E} \sum_j U_j^E C_{j1} & 0 \\ \dots\dots & \frac{1}{\gamma^E} B_{22} & \frac{1}{\gamma^E} B_{23} & -\frac{1}{\gamma^E} \sum_j U_j^E C_{j2} & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & -\frac{1}{\gamma^E} B_{33} & -\frac{1}{\gamma^E} \sum_j U_j^E C_{j3} & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \frac{1}{k^E} \left[4n + \frac{1}{\gamma^E} \sum_i \sum_j U_i^E U_j^E C_{ij} \right] & \frac{2n\gamma^E}{k^E} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \frac{3n\gamma^{E^2}}{2} \end{array} \right\|,$$

les coefficients B_{ij} et C_{ij} étant définis par

$$B_{ij} = \sum_{l=1,2,3} \sum \frac{g_{il} g_{jl}}{E_l} \quad \text{et} \quad C_{ij} = \sum \left(\frac{g_{i1} g_{j1}}{E_1} + \frac{g_{i2} g_{j2}}{E_2} \right)$$

et à vérifier si le point $(1, 1)$ est intérieur à l'ellipsoïde, lieu de k^E et de γ^E , correspondant au niveau α . Généralement, nous avons choisi $\alpha = 0,1$ et $\alpha = 0,02$ pour définir une différence probablement significative ou certainement significative.

Nous donnons en Appendice (Appendice III) des formules simplifiées, correspondant à une distribution $\psi_n(u)$ sphérique, qui se sont révélées équivalentes aux précédentes pour éprouver la signification de l'écart entre $(1, 1)$ et (k^E, γ^E) , ou entre (1) et (k^E) .

b. On peut estimer les quantités

$$(28) \quad \chi_1^2(k=1) = 2 \text{Log } P_0 - 2 \text{Log } P \left(1, A_{1j}, O/U_i, \frac{3n}{(t, t) + 2(t, \rho) + (\rho, \rho)} \right),$$

$$(29) \quad \chi_1^2(\gamma=1) = n \text{Log} \left(\frac{k^{E^4}}{\gamma^{E^3} e^3} \right) - \max_{(k)} \left[4n \text{Log } k - [(t, t) k^2 + 2(t, \rho) k + (\rho, \rho)] \right],$$

$$(30) \quad \chi_2^2(k=\gamma=1) = 2 \text{Log } P_0 - 2 \text{Log}(1, 1, A_{1j}, O/U_i),$$

qui sont asymptotiquement distribuées selon la loi du χ^2 avec, respectivement, 1, 1 et 2 degrés de liberté (Kendall, 1948, t. II, p. 295 et 302).

Il vient

$$(31) \quad \chi_1^2(k=1) = n \text{Log} \frac{\gamma_1^2 k^{E^4}}{\gamma^{E^3}},$$

$$\gamma_1 = \frac{(t, t) + 2(t, \rho) + (\rho, \rho)}{3n},$$

$$(32) \quad \chi_1^2(\gamma=1) = n \text{Log} \left[\frac{k^{E^4}}{k_1^4 \gamma^{E^3}} \right] + (\rho, \rho) + (t, \rho) k_1 - n,$$

$$A k_1^2 + B k_1 = 2n,$$

$$(33) \quad \chi_2^2(k=\gamma=1) = n \text{Log} \left[\frac{k^{E^4}}{e^3 \gamma^{E^3}} \right] + [(t, t) + 2(t, \rho) + (\rho, \rho)].$$

CHAPITRE V.

DISCUSSION DES HYPOTHÈSES ADMISES.

25. **Existence et signification d'une dispersion s des magnitudes.**
 — Admettant pour k une loi de distribution normale (k_0, s), un calcul analogue au précédent donne pour vraisemblance de l'échantillon la fonction

$$\begin{aligned} (34) \quad \text{Log P}(U_i, k, \gamma, \Lambda_{ij}, s) \\ = - \frac{1}{2\gamma} \sum \left(\left[\frac{(k_0 O_1 - L_1)^2}{E_1} + \frac{(k_0 O_2 - L_2)^2}{E_2} + \frac{(O_3 - L_3)^2}{E_3} \right] \right. \\ \left. + \frac{s^2}{\gamma} \left[\Omega^2 \frac{(O_3 - L_3)^2}{E_3} - \left(\frac{O_1 L_2}{E_2} - \frac{O_2 L_1}{E_1} \right)^2 \right] \right) \\ \left. + \sum \text{Log} \frac{\left(k_0^2 + s^2 \left[1 + \frac{2k_0}{\gamma} \left(\frac{O_1 L_1}{E_1} + \frac{O_2 L_2}{E_2} \right) \right] \right)}{2(\gamma \mathcal{E} \pi)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{s^2}{\gamma} \Omega^2 \right)}, \right. \end{aligned}$$

avec

$$\tau_i = \frac{O_{i1}}{E_1} + \frac{O_{i2}}{E_2} \quad \text{et} \quad \Omega^2 = \frac{O_1^2}{E_1} + \frac{O_2^2}{E_2}.$$

Les calculs deviennent inextricables, mais nous pouvons effectuer un développement limité de Log P selon les puissances de $U_6 = s^2$ autour des valeurs $U_i^E(0)$, $k^E(0)$, $\gamma^E(0)$ correspondant au maximum de Log P .

Supprimant les indices E pour la clarté des écritures, et tenant compte de la relation

$$k_0 \sum \Omega^2 - \sum_j U_j \sum \tau_j = \frac{2n\gamma}{k_0},$$

on obtient les expressions suivantes, en posant

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial \text{Log P}}{\partial (s^2)}, \\ \left[\frac{\partial \text{Log P}}{\partial (s^2)} \right]_0 &= [f_1]_0 = - \frac{1}{2\gamma} \sum \Omega^2 - \frac{3n}{k_0^2} + \frac{k_0^2}{2\gamma^2} \sum \Omega^4 \\ &\quad - \frac{k_0}{\gamma^2} \sum_j U_j \sum (\Omega^2 \tau_j) - \frac{1}{2\gamma^2} \sum_i \sum_j U_i U_j \sum (\tau_i \tau_j), \\ \left[\frac{\partial f_1}{\partial U_i} \right]_0 &= - \frac{2}{\gamma k_0} \sum \tau_j - \frac{k_0}{\gamma^2} \sum (\Omega^2 \tau_j) + \frac{1}{\gamma^2} \sum_j U_j \sum (\tau_i \tau_j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial f_1}{\partial k} \right]_0 &= -\frac{2}{\gamma k_0} \sum_j^* \Omega^2 + \frac{2n}{k_0^2} + \frac{k_0}{\gamma^2} \sum_j^* \Omega^4 - \frac{1}{\gamma^2} \sum_j^* U_j \sum_i^* (\Omega^2 \tau_j), \\
 \left[\frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \right]_0 &= -\frac{1}{2\gamma^2} \sum_j^* \Omega^2 + \frac{4n}{\gamma k_0^2} - \frac{k_0^2}{\gamma^3} \sum_j^* \Omega^4 \\
 &\quad + \frac{2k_0}{\gamma^3} \sum_j^* U_j \sum_i^* (\Omega^2 \tau_j) - \frac{1}{\gamma^3} \sum_i \sum_j^* U_i U_j \sum_l^* (\tau_l \tau_j), \\
 \left[\frac{\partial^2 \text{Log P}}{\partial (s^2)^2} \right]_0 &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial (s^2)} \right]_0 = -\frac{7n}{2k_0^4} + \frac{5}{4\gamma^2} \sum_j^* (\Omega^4) \\
 &\quad - \frac{k_0^2}{2\gamma^3} \sum_j^* \Omega^6 - \frac{1}{\gamma k_0^2} \sum_j^* \Omega^2 + \frac{k_0}{\gamma^3} \sum_j^* U_j \sum_i^* (\Omega^4 \tau_j) \\
 &\quad - \frac{1}{2\gamma^3} \sum_i \sum_j^* U_i U_j \sum_l^* (\Omega^2 \tau_l \tau_j) \\
 &\quad - \frac{1}{k_0^2 \gamma^2} \sum_i \sum_j^* U_i U_j \sum_l^* (\tau_l \tau_j)
 \end{aligned}$$

et l'on peut calculer les solutions

$$\begin{aligned}
 U_i^E(s^2) &= U_i^E + \Delta_i^0 \quad (i = 1, 2, 3), \\
 k^E(s^2) &= k^E + \Delta_k^0, \\
 \gamma_i^E(s) &= \gamma_i^E + \Delta_{\gamma_i}^0, \\
 s^2 &= \Delta_s^0.
 \end{aligned}$$

les Δ_j^0 étant les solutions du système de six équations linéaires à six inconnues

$$(35) \quad \left\| \left(\frac{\partial^2 \text{Log P}}{\partial U_i \partial U_j} \right)_0 \right\| < \left\| \Delta_i^0 \right\| + \left\| \left(\frac{\partial \text{Log P}}{\partial U_i} \right)_0 \right\| = 0.$$

Remarquons que, pour $i = 1, \dots, 5$,

$$\left(\frac{\partial \text{Log P}}{\partial U_i} \right)_0 = 0.$$

On voit que nous devons introduire des termes en Ω^4 et même en Ω^6 , c'est-à-dire les moments d'ordre 4 et 6 de la distribution des vitesses. Nous retrouvons l'impossibilité d'estimer la dispersion s des magnitudes sans considérer de tels termes. Bien que, dans ces conditions, les calculs n'aient pas grand sens, nous les avons menés à terme pour un grand nombre de groupes (remarquons que nous n'avons, pour chaque étoile, qu'à calculer les termes supplémentaires $\tau_i \tau_j$, $a \tau_i$, $a \tau_i \tau_j$, $a^2 \tau_i \tau_j$, ce qui ne complique pas beaucoup le programme).

Les valeurs trouvées pour les Δ_i^0 sont très petites. Nous pouvons estimer la signification du résultat ($s = 0$) en calculant

$$(36) \quad \chi_1^2 = 2 \left| \max \text{Log}(U_i, k, \gamma \Lambda_{ij}, s) - \max \text{Log}(U_i, k, \gamma \Lambda_{ij}, 0) \right|$$

ou la quantité équivalente

$$(37) \quad \chi'^2 = \left(\frac{\partial \text{Log } P}{\partial (s^2)} \right)_0 \frac{s^2}{\text{Log } P_0} = \frac{f_1 s^2}{\text{Log } P_0}.$$

Aucune valeur de χ'^2 n'a révélé d'écart significatif à l'hypothèse $s^2 = 0$ (tableau V).

Ceci ne veut pas dire qu'il n'y a pas de dispersion des magnitudes mais que nous n'avons pu en mettre en évidence en utilisant un échantillon aussi réduit et en faisant des hypothèses certainement inexactes sur la normalité de la loi ψ_u .

Ce résultat est confirmé par la comparaison des coefficients de corrélation entre O_1 et O_2 d'une part entre (O_1 ou O_2) et O_3 d'autre part. S'il y avait une dispersion σ_M supérieure par exemple 0,5 magnitude (ce qui correspond à une erreur relative de 20 % sur les distances), la liaison entre $O_3 = \varphi$ et la vitesse tangentielle réduite serait plus faible que celle existant entre les composantes de cette dernière vitesse; le calcul ne confirme pas cette prédiction.

Nous en concluons que nous pouvons considérer l'hypothèse $M = M_0$ comme correcte et non contredite par les données d'observation.

26. Homogénéité de la population et normalité de $\psi_u(u_1)$. — Si nous avons mélangé deux populations ayant M_0 ou $\psi_u(u_1)$ différents, les résultats n'auraient pas été discernables de ceux obtenus en partant d'une loi dispersée pour M ou non gaussienne pour $\psi_u(u)$, surtout si l'on se borne — comme il se doit — aux moments des premier et second ordres. Sinon, ceci reviendrait à admettre une corrélation entre M et $\vec{u}$, ce que nous avons par hypothèse exclu et qu'aucune méthode statistique ne pourrait mettre en évidence : on retrouve le caractère fondamental de la liaison entre les k et les $\vec{u}$.

La condition nécessaire et suffisante de normalité de ψ_u est que $\psi_{\Delta}(\varphi/L, B)$ soit normale pour toutes les directions (L, B). Ayant éprouvé la normalité de ψ_u , donc celle de $\psi_{L, B}(kO_1, kO_2)$, nous pourrions penser à nous servir du théorème affirmant que la condition nécessaire et suffisante pour que k n'ait pas de dispersion est que $\psi_{L, B}, (O_1, O_2)$ soit normale, $\psi_{L, B}(kO_1, kO_2)$ l'étant. Cette méthode fournit une possibilité d'étude et une épreuve indépendante des vitesses spatiales. Malheureusement, le nombre d'étoiles dont nous disposons est insuffisant pour contrôler les hypothèses et nous permettre de conclure.

27. Stabilité des résultats par rapport aux hypothèses faites. —

De nombreuses expériences ont été faites, notamment en ce qui concerne le dernier point. Nous avons successivement :

- a. considéré toutes les étoiles d'un groupe;
- b. éliminé de ce groupe les étoiles de Miss Roman;
- c. éliminé aussi les étoiles à grande vitesse;
- d. donné au contraire un poids 3 ou 4 aux étoiles à grande vitesse.

Les estimations de k et γ se sont révélées pratiquement indifférentes à ces changements (tableau IV).

Ce fait peut s'expliquer : à la différence de certains auteurs déterminant ψ_u à partir des vitesses radiales des étoiles d'un échantillon, puis la même ψ_u à partir de mouvements propres d'autres étoiles (de même type spectral que les premières, mais choisies peut-être avec une sélection observationnelle déformant l'échantillon), nous considérons les composantes O_i des mêmes étoiles.

Nous considérons cette stabilité considérable de k par rapport à toutes les hypothèses faites (sauf l'hypothèse nécessaire et essentielle d'indépendance de la magnitude absolue et de la vitesse) comme extrêmement encourageante et comme un des résultats, sinon le résultat fondamental, de notre étude; puisque c'est elle qui donne tout son sens aux estimateurs choisis et aux estimations obtenues.

28. Rôle de la sélection observationnelle. — Nous avons déjà signalé combien la sélection observationnelle devenait importante dès la 7^e magnitude.

Précisons ce point.

Les étoiles A et F sont très lumineuses et ont une faible densité spatiale : l'échantillon fourni par les catalogues est donc formé d'objets lointains, donc de faible mouvement propre, et ce, d'autant plus que la dispersion des vitesses spatiales est petite pour ces étoiles. La sélection observationnelle joue essentiellement sur les mouvements propres, favorise très fortement les étoiles à grandes vitesses et les étoiles intrinsèquement faibles et conduit à sous-estimer l'éclat des étoiles de ce type (*fig. 3*).

Les étoiles dG et dK, au contraire, sont très peu lumineuses et celles figurant dans les catalogues sont très proches du Soleil; elles ont donc de grands mouvements propres et la sélection observationnelle joue sur l'éclat intrinsèque, favorise les étoiles très lumineuses et conduit à surestimer la magnitude absolue des étoiles de ce type.

Ne pas tenir compte de ces deux phénomènes amène à sous-estimer très gravement la pente de la séquence principale.

Une erreur de même sens est commise si l'on identifie la pente de la

séquence principale des étoiles d'amas et celle des étoiles proches : les étoiles proches de nous ont des âges et certainement des compositions différentes et nous devons nous attendre à ce que la séquence principale de nos proches voisins ait une pente et une largeur plus grandes que celles correspondant aux étoiles d'amas.

La coïncidence entre les résultats obtenus par les deux méthodes n'a

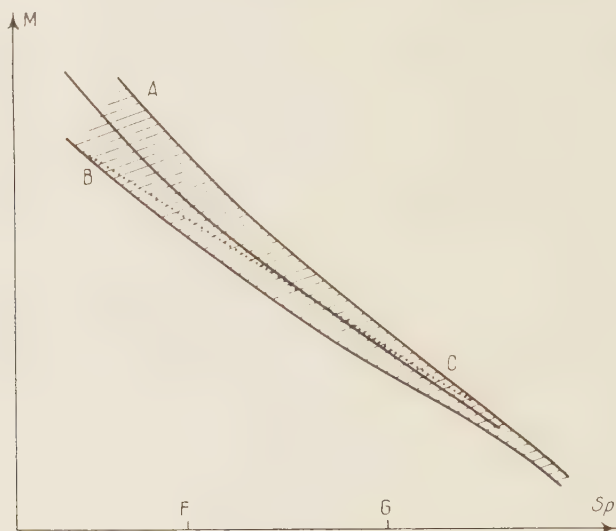


Fig. 3.

La sélection observationnelle favorise les étoiles F à grand mouvement propre (B) et les étoiles très lumineuses (A et surtout C) : on est amené, en la négligeant, à prendre BC comme estimation de la séquence principale, c'est-à-dire à sous-estimer la pente et à en surestimer la largeur (la courbe, en pointillés, n'est pas un estimateur correct de la courbe en trait plein, figurant la magnitude moyenne).

donc pas de valeur, puisque, dans les deux cas, on sous-estime fortement la pente vraie.

Pratiquement, les calculs ont été faits avec les étoiles du groupe (a), c'est-à-dire dont la magnitude apparente est inférieure à 6,6. Les étoiles des groupes (b) et (c) nous ont servi à mettre en évidence la déformation considérable introduite par la sélection observationnelle. k^b , passant d'une valeur proche de 1,2 à la valeur 0,7 ou 0,8, l'erreur systématique est de plus d'une magnitude (tableau VI-VII).

Nous avons pensé à déduire de la variation de k avec la magnitude apparente moyenne une estimation de σ_M largeur de la séquence principale. La sélection joue de manière si compliquée, portant simultanément sur les deux facteurs k et $\bar{u}$, que les résultats sont peu nets, mais on peut

admettre que σ_k est comparable à l'erreur systématique $|k_{(d)} - k_{(c)}|$. Dans le cas des naines dG, par exemple, prenons $\sigma_k \sim 0,5$ ($\sigma_M \sim 1$), le volume contenant les étoiles $m < m_0$ contient 64 fois plus d'étoiles intrinsèquement très brillantes que d'étoiles très peu lumineuses et la magnitude absolue estimée sera celle des objets de plus grand éclat : il viendra : $|k_{(d)} - k_{(c)}| \sim 0,5$. Il faudrait, pour conclure plus complètement, tenir compte de la loi inconnue $\psi_k(k)$ et de la queue de sa distribution.

CHAPITRE VI.

PRINCIPAUX RÉSULTATS OBTENUS.

COMPARAISON AVEC LES PARALLAXES TRIGONOMÉTRIQUES.

29. **Estimations** : k^h et D^E . — Les tableaux I et II indiquent le nombre d'étoiles de chaque groupe et les magnitudes dont nous sommes

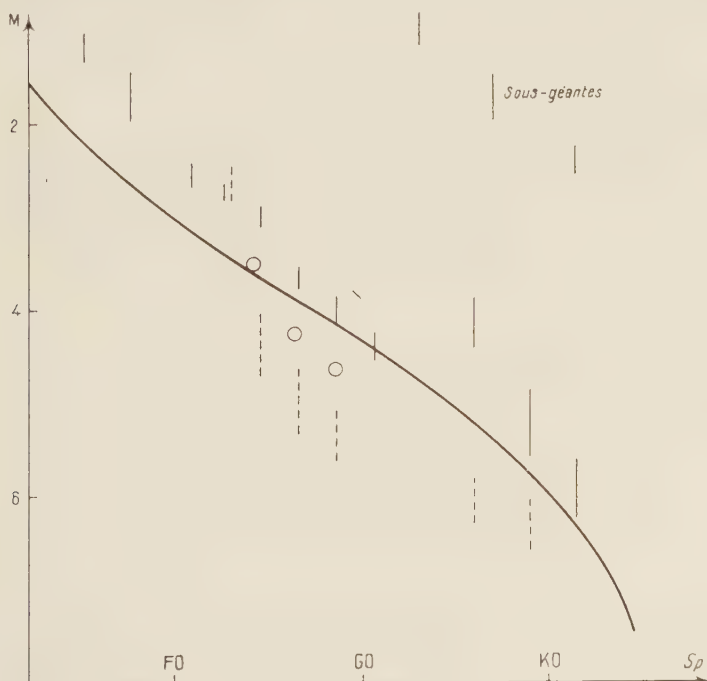


Fig. 4. — Diagramme d'Herzsprung-Russell.

- pour les étoiles $m < 6,6$ } incertitudes
- - - - - pour les étoiles $7,5 < m$ } d'échantillonnage;
- o pour toutes les étoiles;
- d'après Parenago (1951).

partis (d'après Keenan et Morgan, 1951) : notre souci d'homogénéité nous a conduit à considérer des échantillons très peu nombreux d'étoiles dG

nos résultats sont pourvus d'une grande incertitude d'échantillonnage, conséquence de la rigueur de notre choix.

Le tableau VI-VII et les figures 4 et 6 résument les principaux résultats concernant l'estimation de k et de D^2 carré de la dispersion des vitesses. Remarquons simplement, en ce qui concerne k , que le fait d'avoir défini les échantillons en imposant une limite à la magnitude visuelle rend légèrement incorrectes les estimations obtenues, les membres les plus brillants des populations parentes étant favorisés dans notre sélection.

Nous voyons que, dès la 7^e magnitude, la sélection observationnelle joue un rôle prépondérant, dont l'ampleur est même inattendue !

Nous sommes conduit :

— à relever significativement la pente de la séquence principale, particulièrement dans la région A_5-F_5 où nos estimations attribuent aux étoiles une magnitude de moins qu'il n'était généralement admis;

— à diminuer considérablement la pente de la courbe exprimant la variation de D^2 avec le type spectral;

— à imputer les résultats obtenus antérieurement à nos travaux à une sous-estimation du rôle joué par la sélection observationnelle.

Ces résultats sont significatifs dans le cadre des hypothèses faites et indépendants de ces dernières, donc absolument significatifs.

30. L'interprétation astrophysique est très intéressante (*fig. 5*) : les étoiles dG semblent se placer très exactement sur la séquence principale semi-empirique de Hoyle et Schwarzschild (1955); les étoiles A_5-F_5 s'en écartent significativement, la divergence croissant régulièrement jusqu'à atteindre 1 magnitude pour les A_5-F_5 . L'hypothèse du mélange, au voisinage du Soleil, de naines d'âges différents, est très clairement confirmée.

31. Variation de D^2 le long de la séquence principale. Une des questions les plus controversées actuellement est celle de savoir si la séquence principale est unique ou formée de deux sous-séquences distinctes, les étoiles dF et les étoiles dG ayant, notamment, des propriétés cinématiques très différentes (Schatzova, 1956; Einasto, 1954; Parenago, 1955; Miss Wehlau, 1957).

Bien que les coefficients A_v n'interviennent que secondairement dans nos calculs (nous avons vu, en particulier, que nous ne pouvions préciser la *forme* de l'ellipsoïde des vitesses), il est intéressant d'étudier la variation de D et de la vitesse $\hat{U}$ solaire en fonction du type spectral.

Eprouvons l'hypothèse

$$D^2 = D_0^2 \text{ pour toutes les étoiles}$$

par rapport aux hypothèses

$$D^2 = D_I^2 \text{ pour les étoiles dF,}$$

$$D^2 = D_{II}^2 \text{ pour les étoiles dG}$$

(D_0 , D_I , D_{II} paramètres inconnus à estimer) en considérant l'esti-

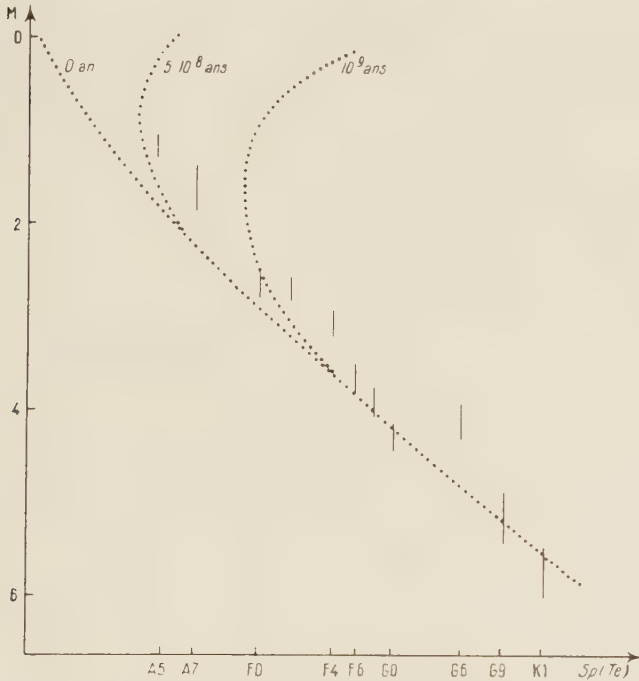


Fig. 5. — Diagramme évolutif semi empirique et diagramme d'Hertzsprung-Russell.

mateur, obtenu classiquement par la méthode du maximum de vraisemblance :

$$(38) \quad \chi^2_1(F, G) = \left[\frac{\sum \frac{D^2}{\sigma_{D^2}^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_{D^2}^2}} - \frac{\sum \frac{D^2}{\sigma_{D^2}^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_{D^2}^2}} \right] : \left[\frac{1}{\sum \frac{1}{\sigma_{D^2}^2}} + \frac{1}{\sum \frac{1}{\sigma_{D^2}^2}} \right]^2$$

dont la loi de distribution asymptotique est celle du χ^2 avec un degré de liberté.

On trouve

$$L_1(F/G) = 5.9.$$

Nous en déduisons que la différence ne peut être considérée comme très significative.

La considération de la vitesse solaire (tableau VIII) nous confirme dans une telle conclusion.

Nous obtenons pour $U(Sp)$ et $D^2(Sp)$ une variation beaucoup plus

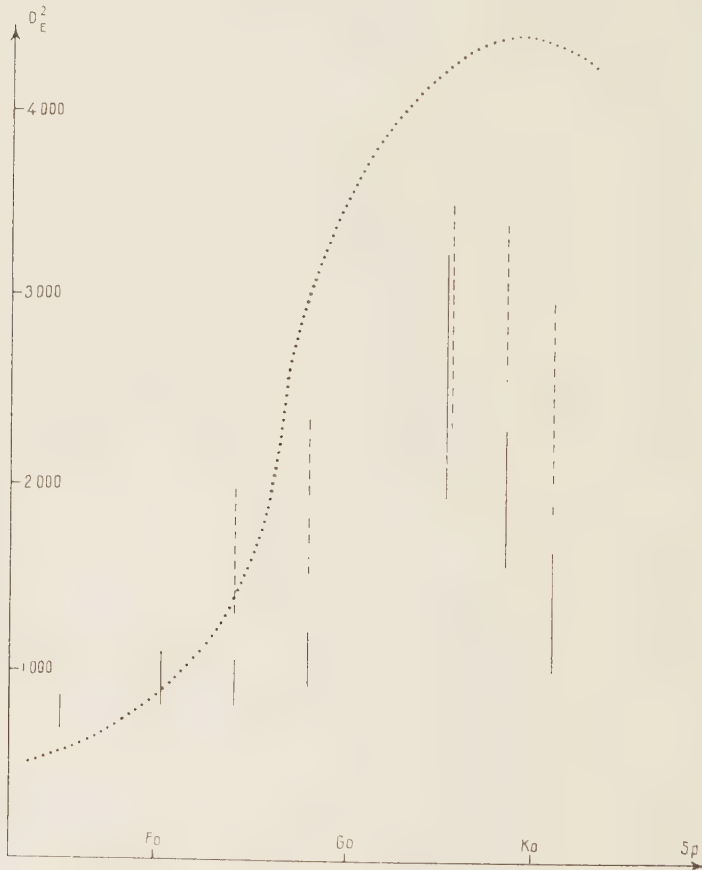


Fig. 6. — $D^{E^2}(Sp)$ (Conventions : cf fig. 4, § 29).

petite que celle admise généralement et trop faible pour être considérée à elle seule comme significative, compte tenu du très petit nombre d'étoiles du type dG que nous avons étudiées.

32. Retour aux parallaxes trigonométriques. — Nous avons,

pour chaque groupe d'étoiles, porté en abscisses les parallaxes trigonométriques telles qu'elles sont données dans le catalogue de Jenkins (*General Catalogue of Trigonometric Stellar Parallaxes*, New Haven, 1952) et en ordonnées, les parallaxes obtenues en admettant que les étoiles ont la magnitude visuelle donnée dans le Wilson et la magnitude absolue admise par Keenan et Morgan (1951).

Nous pouvons admettre que les erreurs sur les abscisses sont normales, d'espérance nulle et de dispersion $\sqrt{h\Lambda^*}$, $\sqrt{\Lambda^*}$ étant l'estimation (généralement sous-estimée) de l'erreur telle que les catalogues la fournissent. De même, nous pouvons admettre pour les parallaxes spectroscopiques une erreur *relative* constante, de dispersion S (soit une erreur absolue Sy^*).

Dans ces conditions, la vraisemblance de x^* , y^* observés pour une étoile de parallaxe x_0 est

$$(39) \quad \text{Log P}(x_0, y_0/\star) = -\frac{1}{2} \left[\frac{(x^* - x_0)^2}{h\Lambda^*} + \frac{(y^* - y_0)^2}{S^2 y^{*2}} \right] \\ - \text{Log} [2\pi S y^* \sqrt{h\Lambda^*}].$$

Admettant que y_0 , parallaxe spectroscopique, est liée à la parallaxe vraie par une relation de la forme

$$(40) \quad y_0 = ax_0 + b$$

la vraisemblance des données d'observation devient une fonction de a et de b obtenue en cherchant pour chaque étoile le maximum, par rapport à x_0 , de $\text{Log P}(x_0, ax_0 + b/\star)$ et en sommant sur toutes les étoiles :

$$(41) \quad \text{Log P}(a, b) = - \sum^* \frac{(y^* - ax^* - b)^2}{2(h\Lambda^* + S^2 y^{*2})} \\ - n \text{Log}(2\pi S \sqrt{h}) - \sum^* \text{Log}(y^* \sqrt{\Lambda^*}).$$

Les calculs ont été faits par le Bureau des Calculs de l'Institut d'Astrophysique en prenant

$$h = 1,5, \\ S = 0,20, \quad S = 0,10, \quad S = 0,00$$

(pour $S = 0$, on retrouve la méthode, classique, conduisant à la droite de régression de x sur y);

— l'hypothèse $S = 0$ s'est révélé suffisante;

— l'estimation obtenue pour b , erreur systématique sur les parallaxes trigonométriques, n'est pas significativement différente de 0;

— a varie, significativement, de 1 (dG) à 1,2 (dF);

— nos résultats sont en bien meilleur accord avec les parallaxes trigonométriques de Jenkins que ceux de Keenan et Morgan.

CONCLUSIONS.

Le catalogue perforé sur machines électroniques (Appendice I) nous semble contenir les renseignements les plus homogènes accessibles actuellement (vitesses spatiales réduites).

La comparaison avec les vitesses spatiales (catalogue de Gliese, 1957) est très intéressante : les écarts sont de l'ordre de 3 km.s^{-1} pour les étoiles les plus proches, ce qui est normal, compte tenu de la nature des données d'observation ayant servi à élaborer les deux catalogues.

Nous avons été gêné, d'une part par la longueur des calculs, de l'autre par le petit nombre de données à notre disposition. Quand l'AGK 3 (prévu pour 1964) et un catalogue de vitesses radiales mesurées par la méthode du prisme objectif seront publiés, ou bien lorsque les mouvements propres, les vitesses radiales, les indices de rougissement et de couleur et les magnitudes visuelles seront mesurés pour toutes les étoiles d'une même ou de plusieurs mêmes « Selected Areas » (et non les vitesses radiales des étoiles d'une aire et les indices des étoiles d'une autre aire), nous aurons une information incomparablement plus riche et tout aussi homogène que celle disponible actuellement.

Dès maintenant, on peut envisager d'obtenir des renseignements intéressants sur la dispersion des magnitudes et la structure fine de la distribution des vitesses en employant des techniques fondées sur l'étude point par point, et non globale, des distributions considérées.

Quelques essais ont été faits dans cette voie : Vyssotsky (1948) estime la vitesse solaire comme l'opposé du mode de la distribution ψ_u des vitesses. Nahon (1956) a suggéré une nouvelle méthode d'analyse des vitesses radiales qu'on peut appliquer aux mouvements propres. Nous-même (1955 C) avons proposé une méthode théorique pour estimer le nuage des vitesses spatiales, ou un nuage ayant asymptotiquement la même densité de probabilité.

REMERCIEMENTS.

Mes remerciements s'adressent à tous les Maîtres qui m'ont aidé au cours de ce travail et plus particulièrement :

à M. E. Schatzman, sous la direction patiente et stimulante de qui ces études ont été poursuivies à l'Institut d'Astrophysique de Paris de 1955 à 1958;

à M. le Professeur A. Danjon qui a suivi mes recherches avec tant de bienveillance et d'attention, m'accordant les plus grandes facilités matérielles;

à M. A. Lichnerowicz qui, à l'École Normale, m'a appris à travailler, plus particulièrement au cours des leçons d'Agrégation et qui n'a pas cessé de me guider et à M. H. Cartan;

à M. J. Delhayé dont l'amitié et l'expérience m'ont soutenu pendant ces cinq années;

à M. D. Dugué, à qui je dois l'essentiel de mes connaissances en statistique et à M. Georges Darmois qui a bien voulu accepter de faire partie de mon jury de thèse;

à Miss E. Scott, au Professeur J. Oort, et à mes camarades et amis de l'équipe de l'Institut d'Astrophysique, de l'Observatoire de Paris et de l'Association française de Calcul.

Je tiens à remercier les administrations et sociétés privées qui ont mis généreusement à ma disposition les moyens de calcul les plus modernes, dont j'avais le plus grand besoin, notamment l'Institut Blaise Pascal, l'Électricité de France, le Ministère de l'Éducation Nationale et les Compagnies Bull et I. B. M. Mes remerciements vont aussi à l'imprimerie Gauthier-Villars qui a apporté tous ses soins à une belle présentation et à M. Brisse, secrétaire de la Rédaction du *Bulletin Astronomique* qui m'a guidé dans la préparation du manuscrit.

TABLEAU I.

Groupes : nombre d'étoiles du groupe. Ellipsoïdes essayés.

Type.	a. $m < 6,6$.	b. $6,6 < m < 7,5$.	c. $7,5 < m$.	a + b. $m < 7,5$.	b + c. $6,6 < m$.	a + b + c. Toutes.
A ₀ -A ₁	256 FS	62 FS	—	—	—	—
A ₅	102 FS	—	—	—	—	—
A ₇	25 AS	—	—	—	—	—
dF ₀ -dF ₁	—	—	—	53	—	—
dF ₂ -dF _{3,7}	87 F	16	16 FGS	103 FGS	—	119 F
dF ₄ -dF ₅	91 F	28	21 FS	119 FS	—	140 F
dF ₆ -dF ₇	62 F	(9)	18 FS	71 FS	—	—
dF ₈ -dF ₉	22	23	12 FS	45 FS	—	—
dF ₆ à dF ₉	84 F	32	30	116 F	—	146 F
dG ₀ -dG ₁	—	—	—	100 FS	—	—
dG ₂ à dG ₄	35	—	24	—	—	—
dG ₅ à dG ₇	29 GS	22 GS	45 GS	—	—	—
dG ₈ à dK ₀	16 GS	(7) GS	32 GS	—	—	—
dK ₁ -dK ₂	23 GS	—	25 GS	—	—	—
dK ₃ à dK ₅	—	—	25 GS	—	—	—
sgG ₂ à sgG ₅	18 FGS	—	—	—	7 FGS	—
sgG ₆ à sgG ₉	16 FGS	—	—	—	17 FGS	—
sgK ₀ à sgK ₂	32 FGS	—	—	—	—	—

Étoiles doubles.

Type	$a.$ $m < 6,6.$	$b.$ $6,6 < m < 7,5.$	$c.$ $7,5 < m.$	$a+b.$ $m < 7,5.$	$b+c.$ $6,6 < m.$	$a+b+c.$ Toutes.
d F ₀ -d F ₁	-	-	(7) FS	29 FS	-	-
d F ₂ -d F ₃	-	-	15 FS	57 FS	-	-
d F ₄ -d F ₅	39 F	27	26 FS	66 FS	-	92 F
d F ₆ à d F ₈	-	-	26 FS	66 FS	-	-

TABLEAU II.
Magnitudes M₀ (k = 1).

Type spectral.	M ₀ .	Type spectral.	M ₀ .
A ₀ -A ₁	0,60	d G ₅	5,20
A ₄	2,10	d G ₆	5,30
A ₅ -A ₆ -A ₇	2,50	d G ₇	5,45
d F ₀ -d F ₄	3,05	d G ₈	5,60
d F ₂ -d F ₃	3,25	d G ₉	5,80
d F ₄ -d F ₅	3,45	d K ₀	6,00
d F ₆ -d F ₇	3,90	d K ₁	6,20
d F ₈ -d F ₉	4,20	d K ₂	6,40
d G ₀ -d G ₁	4,50	d K ₃	6,90
d G ₂	4,75	d K ₄	7,55
d G ₃	4,90	d K ₅	7,80
d G ₄	5,05		

TABLEAUX III.

A. Choix des constantes A_{ij} (cf. § 23).

Ellipsoïde.	A ₁₁ .	A ₁₂ .	A ₁₃ .	A ₂₂ .	A ₂₃ .	A ₃₃ .	$\frac{s_2}{s_1}$.	$\frac{s_3}{s_1}$.
A.....	100	20	0	30	0	30	0,53	0,55
F.....	486	60	0	232	0	150	0,69	0,56
G.....	841	10	0	366	0	185	0,66	0,47
H.....	479	66	-16	164	0	112	0,57	0,48
I.....	400	0	0	200	0	200	0,71	0,71

s₁, grand axe (direction voisine de celle du centre galactique) (unité km.s⁻¹);

s₂, petit axe (direction voisine de celle du pôle galactique);

s₃, petit axe (direction voisine de celle du bras local);

L, longitude du vertex (B = 0, sauf pour l'ellipsoïde II).

*B. Quelques ellipsoïdes obtenus par la méthode des moments (§ 23)
pour 282 étoiles d F₀ à d F₅.*

k.	K.	s ₁ .	s ₂ .	s ₃ .	$\frac{s_2}{s_1}$.	$\frac{s_3}{s_1}$.	L.	B.	D ² .
1,2	1,44...	25	19	9	0,76	0,37	18°	— 5°	1 080
1,3	1,70...	31	22	12	0,73	0,41	14	6	1 649
1,4	2,00...	37	26	15	0,69	0,42	12	11	2 264

On remarque que la forme de l'ellipsoïde dépend beaucoup moins de k et de K que les A'_{ij} .

C. Influence sur k^E et D^E et signification des A'_{ij} .

Groupe.	n .	$\Delta(G/F)$.	$\Delta(G/S)$.	$\Delta(F/S)$.	ELL.	k^E .	D^{E^2} .
dF ₂ -dF ₃ ($a+b$)...	103	4	13	9	F	1,27	972
					G	1,24	990
					S	1,48	1 660
sg G ₂ -sg G ₅ (a).....	18	0,50	3	3	F	1,26	3 521
					G	1,27	3 633
					S	1,06	2 928
sg G ₆ -sg G ₉ (a).....	16	0,70	6	7	F	1,02	2 386
					G	1,01	2 520
					S	1,17	3 717
sg K ₀ -sg K ₂ (a).....	32	0,50	13	12	F	0,99	1 678
					G	1,01	1 757
					S	1,00	2 062
sg G ₇ -sg K ₀ ($b+c$)..	17	0,20	5	6	F	1,00	1 944
					G	1,01	2 013
					S	1,01	2 351

TABLEAU IV.

Stabilité de k^E et de D^E par rapport aux étoiles à grande vitesse.

Groupe.	n .	k^E .	D^{E^2} .	U^{E^2} .	s^{E^2} .	$\log P$.	$\frac{1}{n} \log P$.
A.....	140	0,9900 $\pm$ 0,0673	1,066 $\pm$ 121	350	-0,12	114,3	0,71
B.....	139	1,0084 $\pm$ 0,0685	1,028 $\pm$ 117	325	-0,13	126,5	0,91
C.....	143	0,948 $\pm$ 0,064	1,174 $\pm$ 133	319	-0,10	83,9	0,59

Groupe A : les étoiles dF₄-dF₅.

» B : après élimination de HD 280 036 ($u^2 = 7\,798$).

» C : l'étoile précédente étant, au contraire, comptée quatre fois.

La vraisemblance varie beaucoup plus vite que k^E ou U^{E^2} .

Aucun $\chi^2(s^2)$ ne s'est révélé significatif; souvent même les s^{E^2} sont négatifs. De même les facteurs Δ_i sont négligeables.

Donnons quelques résultats, à titre d'exemple.

TABLEAU V.

Introduction de la dispersion s des magnitudes.

Groupe.	n .	k^E .	σ_M^E .	$\chi^2(t)$.
dF ₂ -dF ₃	103	-0,0200	0	0,3
dF ₄ -dF ₅	119	0,0188	0,27	0,3
dF ₆ -dF ₇	71	0,0038	0,12	0,1

Rappelons que

$$\chi_1^2(\alpha = 0,1) = 2,7.$$

$$\chi_1^2(\alpha = 0,01) = 6,63.$$

TABLEAU VI-VII.

Sp.	<i>m.</i>	<i>n.</i>	k^E	σ_k	D^{E^2}	$\sigma_{D^{E^2}}$	M^E	σ_M	D^{D^2}
A ₅	<i>a</i>	102	1,53	0,121	732	98	1,18	0,15	6
A ₇	<i>a</i>	25	1,43	0,288	—	—	1,72	0,32	7
dF ₀ -dF ₁	<i>a+b</i>	53	1,23	0,135	950	176	2,60	0,22	9
dF ₂ -dF ₃	<i>a</i>	87	1,29	0,111	1062	150	2,70	0,17	11
	<i>c</i>	16	1,33	0,265	1483	500	2,63	0,40	—
	<i>a+b+c</i>	119	1,25	0,093	1031	125	2,76	0,15	—
dF ₄ -dF ₅	<i>a</i>	91	1,21	0,098	928	132	3,04	0,17	20
	<i>c</i>	21	0,65	0,110	1600	350	4,39	0,35	—
	<i>a+b+c</i>	140	0,99	0,067	1066	120	3,47	0,14	—
dF ₆ à dF ₉	<i>a</i>	84	1,08	0,094	1042	153	3,88	0,18	26
	<i>c</i>	18	0,60	0,113	1900	450	5,16	0,38	—
	<i>a+b+c</i>	146	0,84	0,057	1298	145	4,43	0,13	—
dG ₀	<i>a+b</i>	100	1,08	0,086	2272	300	4,33	0,19	33
dG ₃ -dG ₇	<i>a</i>	29	1,75	0,260	2634	650	4,08	0,34	42
	<i>c</i>	45	0,73	0,088	2838	570	5,98	0,28	—
dG ₈ -dK ₀	<i>a</i>	16	1,32	0,265	1158	391	5,20	0,40	42
	<i>c</i>	32	0,81	0,115	1913	457	6,26	0,28	—
dK ₁ -dK ₂	<i>a</i>	23	1,23	0,204	1263	360	5,85	0,39	40
	<i>c</i>	25	1,59	0,254	2386	644	5,29	0,32	—
sg G ₂ -G ₃	<i>a</i>	18	1,26	0,238	3600	1150	0,75	0,38	—
sg G ₆ -G ₉	<i>a</i>	16	1,01	0,203	2400	800	1,73	0,40	—
	<i>b+c</i>	17	0,51	0,099	2000	650	3,23	0,39	—
sg K ₀ -K ₂	<i>a</i>	32	1,00	0,141	2050	500	2,37	0,28	—

m, groupe considéré *a*, $m < 6,6$ *b*, $6,6 < m < 7,5$ *c*, $7,5 < m$ σ , écart type: D^{E^2} , exprimé en (km.s⁻¹)², d'après Parenago (1951).

TABLEAU VIII : — $U_i(E)/Sp$.

Variation de la vitesse solaire avec le type spectral
(étoiles $m < 6,6$).

Sp	<i>n.</i>	$-U_1^E$ (°).	$-U_2^E$	$-U_3^E$	σ_U (°).	U^E
A ₀	256	6,26	10,48	5,19	1	13
A ₅	102	14,82	12,28	4,84	2	20
A ₇	25	15,90	9,98	7,47	4	20
F ₂ -F ₃	87	13,69	12,29	6,66	3	20
F ₄ -F ₅	91	11,38	17,38	7,22	2	22
F ₆ à F ₉	84	13,66	13,19	6,11	2	20

TABLEAU VIII : — $U_i(E)/Sp$ (suite).

Sp.	n.	— U_1^E ⁽²⁾ .	— U_2^E .	— U_3^E .	σ_U ⁽¹⁾ .	U^E .
G ₀ ⁽¹⁾	100	12,46	27,41	3,57	3	30
G ₅ à G ₇	29	25,19	26,93	13,43	6	38
G ₈ à K ₀	16	13,23	18,41	8,72	6	24
K ₁ -K ₂	23	8,65	11,43	7,49	5	16
sg G ₂ à G ₅	18	6,68	11,87	13,47	11	19
sg G ₆ à G ₉	16	15,38	23,41	11,81	9	30
sg K ₀ à K ₂	32	10,49	16,45	5,29	5	20
F ₄ -F ₅ ⁽²⁾	39	9,57	7,38	6,20	3	13
G ₅ à G ₇ ⁽²⁾	44	16,17	25,24	— 4,84	5	30

⁽¹⁾ Ce groupe comprend toutes les étoiles d G₆, quel que soit m .

⁽²⁾ Étoiles doubles $m < 6,6$.

⁽³⁾ Unité : km.s⁻¹.

⁽⁴⁾ Incertitude moyenne d'échantillonnage sur une coordonnée; la loi de distribution de l'estimateur (U_1 , U_2 , U_3) est en fait ellipsoïdale et n'a pas ses axes parallèles aux axes de coordonnées.

APPENDICE I.

PROGRAMMES CONÇUS ET CATALOGUE RÉALISÉ.

Sept programmes différents ont dû être mis au point, selon les machines électroniques mises à notre disposition : Gamma M, 650, Gamma AET et 704. Ce fait a beaucoup retardé les calculs.

Le premier groupe de programmes part des données suivantes :

a. Pour toutes les étoiles : paramètres directeurs des axes galactiques considérés;

b. Par groupe : M_0 , U_1 , U_2 , U_3 (vitesse solaire);

c. Pour chaque étoile, une carte perforée indiquant $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\cos \delta$, $\sin \delta$, O_1 , O_2 , O_3 , r_0 , ID (ID, nombre d'identification comprenant les six chiffres du n° HD, un chiffre indiquant la classe de luminosité, deux pour le type spectral et un dernier chiffre indiquant les particularités spectroscopiques éventuelles).

Le calcul (2 secondes par étoile) aboutit à la création de six cartes par étoile que nous distinguons par une perforation en colonne 65.

u_i^R , composantes de la vitesses résiduelle de l'étoile $u_i^R = u_i + U_i$;

E, constantes (date du calcul, choix des U_i);

$V_1 = \sin^2 L + \cos^2 L$;

$V_2 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$ (φ angle parallactique);

$$t = \sqrt{O_1^2 + O_2^2};$$

$\Delta\rho$, composante radiale de la rotation galactique ($O_3 = \rho - \Delta\rho$);

x_i , coordonnées galactiques cartésiennes de l'étoile;

★, perforation de 0 non listés (les autres notations ont été définies au paragraphe 2).

Carte.	Nature des 10 quantités figurant sur chaque carte.									
3.....	E	r_0	u^2	u^{R^2}	★	u_1^R	u_2^R	u_3^R	★	ID
5.....	g_{11}	g_{21}	g_{12}	g_{22}	g_{23}	g_{31}	g_{32}	g_{33}	★	ID
6.....	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$-10 \Delta\varphi$	★	$\mu_L \cos B$	μ_B	★	V_1	V_2	ID
7.....	$\cos L$	$\sin L$	$\cos B$	$\sin B$	O_3	t	O_1	O_2	m_0	ID
8.....	O_{11}	O_{21}	O_{33}	O_{12}	O_{22}	O_{32}	O_{13}	O_{23}	★	ID
9.....	x_1	x_2	x_3	L	B	u_1	u_2	u_3	M_0	ID

Le second groupe de programmes part, soit des cartes 5 et 8, soit de la carte 7, soit des cartes 7 et 5 précédemment créées.

Chaque groupe d'étoiles est précédé d'une ou deux cartes indiquant les valeurs adoptées pour A_{ij} , k et U_i .

Les calculs (4 à 8 secondes selon la nature du calculateur) aboutissent à la perforation de trois cartes identifiables selon une perforation en colonne 65.

Carte.	Nature des 10 mots figurant sur la carte.									
0.....	u_1	u_2	u_3	φ^2	$k^2 t^2$	kt_1	kt_2	kt_3	k	ID
1.....	u^2	$\frac{1}{E_1}$	$\frac{1}{E_2}$	$\frac{1}{E_3}$	u^{R^2}	u_1^R	u_2^R	u_3^R	★	ID
2.....	τ_1	τ_2	τ	$\frac{1}{E_1 E_2 E_3}$	Ω^2	E'	v_0	k	★	ID

E' sont des constantes relatives à l'ellipsoïde choisi.

Les calculs se font en virgule fixe (sauf sur 704), les cosinus et sinus étant définis avec quatre décimales; les vitesses le sont au $1/100^e$ de km.s^{-1} de manière à ne pas accumuler les erreurs d'arrondi (les calculs faits en virgule fixe sur 650, puis en virgule flottante sur 704 ont donné lieu aux mêmes estimations pour k^k , ...).

En plus des calculs par étoile, on obtient des sommations portant sur les groupes (six cartes par groupe dans le premier programme, 11 dans le second, soit en tout 170 résultats). Par exemple, un programme résout entre autres les équations (35), inverse la matrice (§ 24) et calcule

pour les χ^2 (31), (32), (33), (36), (37) en plus de la résolution de (13), (21), (22), (23), (24).

Le premier groupe de programme est relatif au changement de coordonnées galactiques (nous avons donné au paragraphe 2 les constantes adoptées par nous). Mais le passage à un autre ensemble de paramètres directeurs oblige seulement à modifier quelques cartes du programme) et à un calcul de g_{ij} , O_{ij} , u_i , u_i^R , x_i .

Le second groupe calcule de nouvelles valeurs de u_i , u_i^R (k_0 , U_i), mais estime essentiellement les quantités k^E ,

Nous avons attribué aux rares étoiles ne figurant pas dans le H. D. un numéro compris entre 280.000 et 281.000.

APPENDICE II.

ESTIMATION DE LA VITESSE SOLAIRE EN EMPLOYANT DIFFÉRENTES TECHNIQUES.

1° L'accord est excellent entre U_i^E et $\langle k^E \bar{t}_1 + \bar{\rho}_1 \rangle$; l'écart dépasse rarement 1 km.s⁻¹ et n'est jamais significatif.

Sp.	<i>n.</i>	— U_1^E .	σ .	— U_2^E .	σ .	— U_3^E .	σ .	— U_1 .	— U_2 .	— U_3 .
dF ₂ -F ₃	81	14	2	12	2	1	2	14	11	6
dF ₄ -F ₅	91	11	2	11	2	1	2	13	17	8
dF ₆ à F ₉	62	14	2	13	2	6	2	12	14	6
dK ₁ -K ₂	23	9	—	—11	—	8	—	8	—13	9
sg K ₀ à K ₂	32	10	—	16	—	5	—	9	16	5

Remarque. — La loi de distribution de l'estimateur (U_1 , U_2 , U_3) ayant des axes quelconques, les erreurs d'échantillonnage ne sont indiquées qu'à titre indicatif.

2° L'accord est moins bon entre les valeurs obtenues pour U_i (§ 13) n appliquant la technique des moindres carrés à O_1 , O_2 , séparément et à $O_1 + O_2$.

Sp.	<i>n.</i>	Technique.	— U_1 .	σ .	— U_2 .	σ .	— U_3 .	σ .
dF ₂ -dF ₃	103	O_1	9,5	2,4	10,3	2,0	Indéterminé	
		O_2	8,3	3,3	5,3	3,9	4,3	1,7
		O_1+O_2	8,6	—	7,7	—	2,4	—
dF ₄ -dF ₅	119	O_1	8,0	2,5	12,8	2,2	Indéterminé	
		O_2	14,4	3,7	13,7	3,8	6,5	1,9
		O_1+O_2	11,2	—	13,3	—	3,3	—
dF ₆ -dF ₉	91	O_1	9,4	3,0	16,2	2,7	Indéterminé	
		O_2	10,5	3,4	5,0	3,9	5,7	1,9
		O_1+O_2	10,0	—	10,6	—	2,9	—
dF ₂ -dF ₃ (doubles).....	57	O_1	6,7	2,4	5,0	2,2	Indéterminé	
		O_2	16,2	5,4	1,4	6,5	2,7	3,3
		O_1+O_2	11,5	—	3,2	—	2	—

3° L'accord entre $U_i(t)$ et $U_i(\rho)$ est bon; l'estimateur k^M est, par contre, incorrect.

Sp.	n.	L(t).	L(ρ).	B(t).	B(ρ).	$k^M = \frac{U(\rho)}{U(t)}$.	k^E .
F ₂ -F ₃	103	42°	44°	12°	23°	1,04	1,24
F ₄ -F ₅	119	49	39	11	25	0,82	1,25
F ₆ à F ₉	71	46	28	11	14	0,98	1,07
F ₂ -F ₃ (doubles)...	57	15	44	14	37	1,54	0,88

L, B, longitude et latitude de l'apex (axes galactiques).

APPENDICE III.

FORMULES APPROCHÉES.

1° Dans le cas d'une distribution sphérique des vitesses, il vient

$$(42) \quad U_i^E = \bar{\rho}_i + k \bar{t}_i,$$

$$(43) \quad k^{E^2} \cdot \sigma_i^2 - \sum_i \bar{t}_i \bar{\rho}_i - 2(\sigma_\rho^2) = 0,$$

$$(44) \quad D^{E^2} = 3 \left(\sigma_\rho^2 - k \sum_i \bar{t}_i \bar{\rho}_i \right).$$

2° Si, de plus, la vitesse moyenne est nulle (distribution isotrope),

$$(45) \quad k^E = \sqrt{\frac{2 \bar{\rho}^2}{\bar{t}^2}},$$

$$(46) \quad D^E = \sigma_\rho \sqrt{3}.$$

Nous avons déjà vu combien ces estimateurs, et notamment (43) et (45) étaient grossiers.

3° Par contre, les termes rectangles de la matrice aux erreurs d'échantillonnage, sont en général très petits (sauf $\frac{2 n \gamma_i^E}{k^E}$, exprimant la corrélation entre k^E et γ_i^E) : ils sont nuls dans le cas d'une distribution isotrope des vitesses; les $B_{ij} (i \neq j)$ sont nuls pour une répartition symétrique $\psi_\Delta(L, B)$.

Au premier ordre en $d = \frac{L^2}{u^2}$, les termes $\sum_i U_j C_{ij}$ sont nuls, les estimateurs γ^E, k^E d'une part U_i^E de l'autre sont indépendants et nous sommes ramené à inverser la matrice de second ordre

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{\gamma^E} \left(\sum_i \sum_j U_i^E U_j^E C_{ij} \right) + 4n & \frac{2n \gamma^E}{k^E} \\ \frac{2n \gamma^E}{k^E} & \frac{3}{2} n \gamma^{E^2} \end{array} \right\|.$$

ce qui conduit, à l'approximation indiquée, aux estimateurs

$$(47) \quad \sigma_{\tilde{U}}^2 \sim \frac{D^2}{n},$$

$$(48) \quad \sigma_k^2 \sim \frac{3k^2}{2n(2+3d)},$$

$$(49) \quad \sigma_{\gamma}^2 \sim \frac{2\gamma^2(2+d)}{n(2+3d)},$$

$$(50) \quad r_{k\gamma}^2 \sim \frac{4k^2}{3\gamma^2(2+d)} \quad (r > 0).$$

$\bar{u}^2$.	0.	$2u^2$.	$3u^2$.	$6u^2$.	$10u^2$.	∞ .
d	∞	0,500	0,333	0,167	0,100	0,000
$n \frac{\sigma_k^2}{k^2}$	0,00	0,86	1,00	1,20	1,30	1,50
$n \frac{\sigma_{\gamma}^2}{\gamma^2}$	0,67	1,00	1,56	1,73	1,83	2,00
$r_{k\gamma}^2$	0,00	0,53	0,57	0,62	0,64	0,67

En fait, nous avons obtenu pour $\frac{n\sigma_k^2}{k^2}$ des valeurs comprises entre 0,60 et 0,70 et pour $\frac{n\sigma_{\gamma}^2}{\gamma^2}$ des valeurs comprises entre 1,75 et 1,90. L'erreur relative est presque deux fois plus petite sur k^E que sur D^{E2} , r restant voisin de 0,7.

Nous pouvons prendre, en première approximation,

$$(51) \quad \frac{\sigma_k}{k} = \frac{0,8}{\sqrt{n}},$$

$$(52) \quad \frac{\sigma_{\gamma}}{\gamma} = \frac{1,35}{\sqrt{n}},$$

$$(53) \quad \sigma_M = \frac{1,60}{\sqrt{n}}.$$

APPENDICE IV.

ÉTOILES SIMPLES ET ÉTOILES MULTIPLES.

Les étoiles doubles ont été traitées à part (presque toutes sont des doubles visuelles). Leur nombre est trop peu élevé pour que nous puissions faire des estimations intéressantes, mais nous retrouvons :

1° la variation de k^E avec m ;

2° des valeurs (k^E , D^{E2} , U^E) différentes de celles correspondant aux étoiles simples, ce qui nous confirme que nous avons eu raison de ne pas

mélanger des populations différentes, pourvues d'erreurs d'observation et de sélection observationnelle également différentes.

Sp.	$m.$	$n.$	$k^E.$	$\sigma_k.$	$D^{E2}.$	$\sigma_{D^2}.$	$U^E.$	$\sigma_U.$
d F ₀ -F ₁	$a + b$	29	1,53	0,227	910	229	16	10
d F ₂ -F ₃	$a + b$	57	0,88	0,092	978	174	11	7
	c	15	0,39	0,080	880	305	17	13
d F ₄ -F ₅	a	39	1,10	0,147	1 116	241	14	5
	$a + b$	66	1,14	0,112	1 355	225	16	7
	c	26	0,44	0,069	1 277	338	11	12
	$a + b + c$	92	0,72	0,063	1 359	190	13	4
d F ₆ -F ₈	$a + b$	66	1,24	0,122	1 045	140	22	7
	c	26	0,54	0,084	1 585	419	14	14
d G ₅ -G ₇	c	14	0,82	0,175	2106	759	18	8
d G ₈ -K ₀	c	16	1,13	0,226	3 387	1 143	35	15

BIBLIOGRAPHIE.

- AMBARTZUMIAN (B. A.), 1936, *On the deviation of the frequency function of space velocities of the stars from the observed radial velocities* (M. N. R. A. S., t. 96, 1936, p. 172-179).
- CHARLIER (C. V. L.), 1926, *The motion and distribution of the stars*, Univ. Cal. Press, Berkeley, 1926.
- CRAMER (H.), 1945, *Mathematical Methods of Statistics*, Upsalla, 1945.
- DELHAYE (J.), 1951, *Contribution à l'étude de la distribution des vitesses stellaires* (Bull. Astron., t. 16, 1951, p. 1).
- DELHAYE (J.), 1953, *Astronomie stellaire*, Armand Colin, Paris, 1953.
- DELHAYE (J.), 1957, *Caractère non maxwellien de la distribution des vitesses stellaires* (Séminaires de l'Observatoire de Paris, 18 février 1957).
- DELHAYE (J.) et BLAAUW (A.), 1949, *A table of systematic corrections to the proper motions in the General Catalogue* (B. A. N., t. 10, 1949, n° 400).
- DUGUÉ (D.), 1937, *Application des propriétés de la limite au sens du calcul des probabilités à l'étude de diverses questions d'estimation* (Thèse) (J. Éc. Polytechnique, t. III, série 3, 1937).
- EINASTO (Ja. E.), 1954, *Kinematic structure of the main sequence* (Publ. Tartu Obs., t. 32, 1954, p. 371-462; résumé dans les A. N. L., n° 82, p. 18).
- FEHRENBACH (Ch.) et DUFILOT (M^{me} X.), 1957, *Les étoiles à grandes vitesses* (Colloque Astronomique, Paris, 1957).
- GLIESE (W.), 1957, *Katalog der Sterne näher als 20 Parsek für 1950.0* (Astr. Inst. Heidelberg, Mitteilungen Série A, n° 8).
- GYLLENBERG (W.), 1915, *Stellar Velocity Distribution as derived from observations in the line of sight* (Meddel. Lund Obs., série II, n° 13, 1915).
- KEENAN (P. C.) et MORGAN (W. W.), 1951, *Classification of Stellar Spectras*, in HYNICK, *Astrophysics*, New-York, 1951.
- KENDALL (M. G.), 1948, *The advanced theory of statistics*, Londres, 1948.
- KUIPER (G. P.), 1942, *The nearest stars* (Ap. J., t. 95, 1942, p. 201-212).
- MALMQUIST (K. G.), 1928, *The radial velocities of the stars in Handbuch der Astrophysiks*, t. VI, p. 121-132.

- MINEUR (H.), 1944, *Extension de la méthode des moindres carrés* (Ann. Astroph., nos 3-4, 1944, p. 121-132 et 133-134).
- NAHON (F.), 1956, *Sur une nouvelle méthode d'analyse des vitesses radiales* (C. R. Acad. Sc., t. 242, 1956, p. 463-465).
- NAHON (F.), 1957 A, *Sur la détermination du nuage des vitesses spatiales* (C. R. Acad. Sc., t. 244, 1957, p. 2688-2691 et 2775-2777).
- NAHON (F.), 1957 B, *Recherches sur la loi de force et les mouvements stationnaires des étoiles dans la direction perpendiculaire au plan galactique* (Bull. Astron., t. 21, fasc. 1 et 2, 1957 et Thèse).
- NORDSTRÖM (H.), 1936, *A study of stellar motions based on radial velocities* (Meddel. Lund Obs., série II, n° 79, 1936).
- OORT (J. H.), 1926, *The stars of high velocity* [Publ. Kapteyn Lab., n° 40, 1926 (Groningen), p. 1-76].
- PARENAGO (P. P.), 1951, *Étude des vitesses spatiales des étoiles* (en russe) [Trav. Inst. Steinberg, t. XX, 1951, p. 26-81 (Moscou)].
- PARENAGO (P. P.), 1955, *La classification des étoiles et les problèmes de structure de la galaxie* (Colloque Intern. C. N. R. S., Paris, 1955).
- RIGAL (J. L.), 1955, *Étude statistique des mouvements stellaires* (C. R. Acad. Sc., t. 241 1955, p. 1714-1717; t. 241, 1955, p. 1916-1919 et t. 242, 1956, p. 230-232; Contr. I. A. P., série A, n° 211).
- RIGAL (J. L.), 1955 B, I. *Les méthodes générales d'estimation*; II. *Application aux magnitudes absolues* (Séminaires de l'Observatoire de Paris, 1955-1956).
- RIGAL (J. L.), 1955 C, *Une méthode d'obtention de la distance moyenne* (Séminaire I. A. P., 27 mai 1955, Paris).
- ROMAN (Miss N. G.), 1952, *The spectras of the bright stars of types F₅-K₅* (Ap. J., t. 116, 1952, p. 122-144).
- ROMAN (Miss N. G.), 1955, *A catalogue of high-velocity stars* (Ap. J., suppl. n° 18, 1955).
- SCHATZMAN (E.), 1954, *Cours de M. E. Schatzman* (Certificat d'Astronomie Approfondie), Centre universitaire de polycopiage, Paris, 1954.
- SCHATZMAN (E.) et RIGAL (J. L.), 1956, *Étude statistique des mouvements stellaires. IV. Cas des sg F à grande vitesse de rotation équatoriale* (C. R. Acad. Sc., t. 242, 1956, p. 230-232).
- SCHATZOVA (R. B.), 1956, *Two selections of observations of absolute faint stars* [Ap. J., U.R.S.S., t. 33, 1956, p. 866-879 (Moscou)].
- SCHWARZSCHILD (M.) et HOYLE (F.), 1955, *On the evolution of type II stars* (Ap. J., suppl. n° 15, 1955).
- SPENCER JONES (Sir H.), 1929, *Stellar parallaxes determined photographically* (M.N.R.A.S., t. 89, 1929, p. 497).
- TRUMPLER (R. J.) et WEAVER (H. F.), 1953, *Statistical Astronomy*, Univ. Cal. Press, Berkeley, 1953.
- VAN WIJK (U.), 1956, *The origin of the high-velocity stars* (A. J., t. 61, 1956, p. 277-282).
- VYSSOTSKY (A. N.) et WILLIAMS (E. T. R.), 1948, *An investigation of stellar motion* (Publ. Mac Cormick Ob., t. 10, 1948).
- WEHLAU (Miss A. W.), 1957, *Velocity ellipsoids of near-by stars* (A. J., t. 62, 1957, p. 169-174).

(Manuscrit reçu le 2 juin 1958).

SECONDE THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ



Calcul des valeurs propres des matrices.

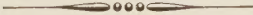
Vu et approuvé :

Paris, le 14 avril 1958.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
Joseph PÉRÈS

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
Jean SARRAILH



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Grands-Augustins, 55.

153837-59

Dépôt légal, Imprimeur, 1959, n° 1312.

Imprimé en France.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

Quai des Grands-Augustins, 55.

153837

Imprimé en France.